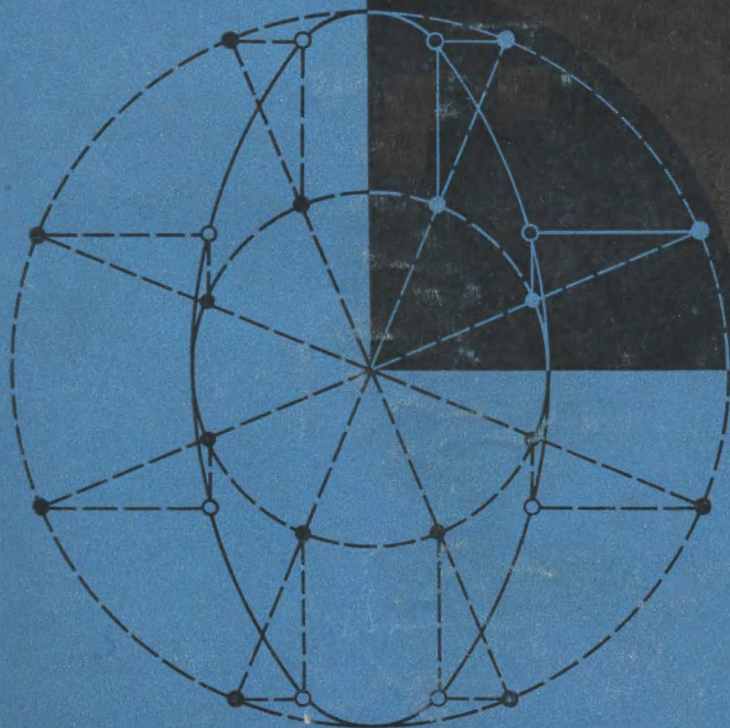


ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

П. Н. МАТХАНОВ

П. Н. МАТХАНОВ

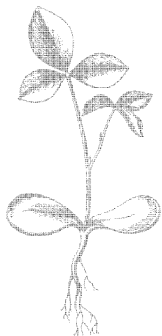
ОСНОВЫ синтеза линейных электрических цепей



П. Н. Матханов

ОСНОВЫ СИНТЕЗА *линейных электрических цепей*

*Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов радиотехнических
и электротехнических специальностей
высших учебных заведений*



«ВЫСШАЯ ШКОЛА» МОСКВА 1976

6П2.1

М33

УДК 621.3.06 (075)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра ТОЭ Рязанского радиотехнического института;
докт. техн. наук, проф. Л. А. Бессонов.

Матханов П. Н.

М 33 Основы синтеза линейных электрических цепей. Учеб. пособие для радиотехнич. и электротехнич. специальностей вузов. М., «Высш. школа», 1976.

208 с. с ил.

В книге излагаются наиболее существенные вопросы современной теории синтеза электрических цепей из сосредоточенных элементов.

Наряду с классическими вопросами синтеза пассивных цепей из сосредоточенных элементов изложены вопросы синтеза линейных активных цепей с резистивно-емкостными элементами.

М $\frac{30306-018}{001(01)-76}$ 124-76

6П2.1

Предисловие

Синтез электрических цепей является одной из главных частей современной теории цепей, позволяющей углубить основные понятия теории и наиболее полно уяснить свойства цепей различного вида. Научно обоснованное проектирование электрических цепей, применяемых в различных областях радиоэлектроники и электротехники, возможно только на основе методов синтеза.

Роль синтеза электрических цепей особенно велика при создании резистивно-емкостных активных цепей интегральной микроэлектроники.

Материал, относящийся к современному синтезу цепей, очень обширен, а время, отводимое программой на раздел синтеза, весьма ограничено. Так что излагаемый материал должен быть небольшим по объему и включать в себя наиболее существенные основы теории, простейшие, но важные для приложений методы синтеза как пассивных, так и активных цепей, примеры решения некоторых типичных практических задач. Содержание материала должно быть таким, чтобы на его основе учащийся смог без особых затруднений самостоятельно изучить более сложные вопросы синтеза, привлекая имеющуюся довольно обширную литературу, если в этом появится необходимость. По приведенным соображениям при отборе материала пришлось ограничиться рассмотрением только простых, но получивших известность классических методов синтеза линейных пассивных и активных цепей, в основном с двумя видами элементов. Реактивные цепи и резистивно-емкостные цепи, синтезируемые очень простыми методами, хотя и содержат только два вида элементов, но находят широкое практическое применение.

Пособие состоит из введения и пяти глав. Во введении после определения понятия синтеза цепи приводятся известные из анализа краткие сведения о параметрах цепи и частотных характеристиках, а также рассматриваются способы нахождения функций цепи по заданным аналитически дробно-рациональным выражениям частотных характеристик.

Глава I посвящена свойствам и реализации входных функций двухполюсников. Вводятся понятия энергетических функций, положительно вещественных функций и рассматриваются свойства

и реализация входных сопротивлений и проводимостей пассивных двухполюсников с двумя видами элементов.

В главе 2 изложены свойства параметров и функций передачи четырехполюсных цепей и простейшие методы реализации пассивных четырехполюсников с двумя видами элементов.

В главе 3 дано понятие об аппроксимации заданных характеристик и рассмотрен синтез полиномиальных фильтров, а также цепи, формирующей импульс прямоугольной формы, и цепи задержки; приведено понятие синтеза согласующих цепей.

В главе 4 излагаются свойства основных идеальных активных элементов, применяемых для синтеза активных RC -четырёхполюсников.

В главе 5 приводятся некоторые методы реализации функций передачи с помощью активных RC -цепей.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам проф. Л. А. Бессонову и доц. А. П. Карпушину за ценные замечания и предложения.

Автор

Введение

§ В.1. Задача синтеза линейных электрических цепей

Под синтезом электрических цепей понимают расчетный процесс, обратный процессу анализа цепей. Если цель анализа состоит в нахождении реакций заданной цепи при заданных воздействиях, то цель синтеза состоит в нахождении самой цепи по заданным воздействиям и требуемым реакциям.

Сопоставим основные черты процессов анализа и синтеза.

Анализ цепи может производиться с целью определения характеристик установившегося режима (частотных характеристик) или характеристик переходного процесса (временных характеристик). Синтез цепи также можно производить по заданным частотным или временным характеристикам.

В задаче анализа предполагаются заданными электрическая цепь (схема со значениями элементов) и внешние воздействия. Требуется найти реакцию цепи-напряжения и токи в интересующих нас ветвях.

Анализ цепи при использовании операторного метода можно подразделить на два этапа:

1) составление операторных уравнений и определение функции цепи-сопротивления или функции передачи;

2) нахождение по полученному изображению искомой реакции: частотной характеристики или оригинала, т. е. временной функции.

Решение задачи анализа всегда существует. Анализ дает единственное решение.

В синтезе задача ставится следующим образом: задана реакция (частотная или временная), которую желательно иметь на выходе цепи, и действующий на входе сигнал. Необходимо найти самую цепь (схему и параметры всех элементов), которая производит требуемое преобразование сигнала.

Процесс синтеза можно также подразделить на два этапа:

1) аппроксимацию — нахождение по заданным частотным или временным характеристикам функции цепи, удовлетворяющей условиям физической осуществимости;

2) реализацию — построение схемы с данными всех элементов по известной физически осуществимой функции цепи.

Поясним некоторые особенности указанных этапов. Характеристики, частотные или временные, задаваемые в синтезе, являются идеальными — они не учитывают возможностей физических

свойств цепей, так как заранее учесть свойства неизвестной синтезируемой цепи невозможно. Это обстоятельство приводит к тому, что заданные характеристики могут быть получены точно только при бесконечном числе элементов цепи. Но такие цепи нельзя осуществить — из сосредоточенных элементов можно построить цепи только с конечным числом элементов с конечными значениями параметров. При конечном числе элементов речь может идти только о приближенном воспроизведении нужной характеристики с требуемой точностью. Задача аппроксимации и состоит в определении физически осуществимой функции цепи конечного, по возможности минимального порядка, отклонение реакции которой от заданной характеристики не превышает допустимого значения.

Решение задачи аппроксимации не является единственным — можно найти множество различных функций цепи с отклонениями реакций от заданных, лежащими в допустимых границах.

Поскольку при постановке задачи синтеза нельзя полностью учесть свойства цепи, то в некоторых случаях могут быть заданы такие функции на входе и выходе, которые нельзя получить с помощью цепи нужного вида и конфигурации. Это означает, что поставленная задача синтеза не имеет решения.

Реализация, т. е. построение цепи, которая имеет заданную или полученную в результате аппроксимации функцию цепи, также не имеет единственного решения. Можно найти множество эквивалентных цепей, имеющих одну и ту же функцию передачи или входную функцию.

Таким образом, приходим к выводу, что решение задачи синтеза не всегда существует; если решение существует, то оно не единственно. Из ряда возможных решений необходимо выбрать такое, которое обеспечит получение цепи, удовлетворяющей практическим требованиям в отношении вида цепи и минимального числа элементов, конфигурации схемы и т. п. Следует отдавать предпочтение такому решению задачи аппроксимации, которое дает функцию цепи приемлемой конфигурации, реализуемую с наименьшим числом элементов. Приведенное соображение показывает, что оба этапа синтеза тесно связаны — при решении задачи аппроксимации необходимо учитывать состояние и возможности техники реализации.

Из изложенного следует, что постановка задачи синтеза соответствует постановке задачи проектирования электрических цепей различного назначения — синтез является основой научного проектирования. Как и при всяком проектировании, практические соображения, а также экономика играют решающую роль в оценке достоинств решения поставленной задачи.

Следует отметить, что понятия синтеза и проектирования не эквивалентны. Методы синтеза дают варианты решений. Процесс выбора наилучшего из них в том или ином смысле, называемого оптимизацией, относится к проектированию. Вопросы оптимизации в данной книге не рассматриваются.

Условия и цели проектирования могут быть различными, соответственно постановка задачи синтеза также может иметь различный характер.

Поскольку основная задача инженера состоит в проектировании и создании новых более совершенных устройств, то значение синтеза электрических цепей для инженеров-электриков очень велико.

Можно производить синтез цепей различных видов — двухполюсных, четырехполюсных и многополюсных, которые отличаются друг от друга числом входных и выходных выводов. К входным выводам прикладывается источник возбуждения (сигнала), а токи или напряжения выходных выводов являются интересующими реакциями.

Область современного синтеза цепей весьма обширна, многие ее разделы значительно сложнее вопросов анализа, что, конечно, в порядке вещей: обратная задача всегда сложнее прямой. Мы ограничимся рассмотрением лишь элементов этой обширной области.

Далее излагаются простейшие приемы синтеза двухполюсных и четырехполюсных цепей, составленных из пассивных и активных элементов, и применение их к решению некоторых типичных задач синтеза по заданным частотным и временным характеристикам.

Вначале необходимо привести определение понятий пассивных и активных элементов, а также некоторые известные из анализа сведения о параметрах двухполюсных и четырехполюсных цепей, которые понадобятся в дальнейшем.

§ В.2. Пассивные и активные линейные цепи

В данной книге будет рассматриваться синтез как пассивных, так и активных линейных цепей с постоянными параметрами. Поэтому необходимо привести определение указанных двух классов цепей.

С чисто внешней стороны цепь называется пассивной, если она составлена из таких обычных двухполюсных элементов, как *активное сопротивление*, *индуктивность*, *емкость*, а также четырехполюсных и многополюсных элементов, как *трансформатор* и т. п.

Если к цепи из указанных элементов добавить хотя бы один элемент в виде транзистора, триода, а также туннельного диода с соответствующими смещениями, то получим активную цепь. Упомянутые элементы — трехполюсные (транзистор, триод) или двухполюсные (туннельный диод) — при соответствующих смещениях являются активными элементами.

Понятия пассивный и активный элемент и пассивная и активная цепь различаются по знаку потребляемой энергии: потребляемая

пассивным элементом и пассивной цепью энергия всегда положительна; энергия же, потребляемая активным элементом и активной цепью, в некоторые моменты времени может иметь отрицательный знак, что означает генерирование энергии.

Параметры линейных пассивных элементов, т. е. значения R , L и C вещественны и положительны. Основные характеристики двухполюсных элементов: $i = Gu$, $\psi = Li$ и $q = Cu$ (ψ — потокосцепление, q — заряд) линейны и располагаются в первом и третьем квадрантах плоскости с соответствующими координатными осями (u, i ; ψ, i ; q, u). Поэтому энергия в элементах и в цепи, составленной из них, не принимает отрицательных значений: энергия только потребляется или запасается, но не генерируется.

Указанное выше условие потребления энергии принимается в качестве определения свойства пассивности элемента или цепи.

Рассмотрим условие пассивности двухполюсной цепи во временной области.

Мгновенные значения напряжения u и тока i на входе двухполюсника связаны между собой свойствами цепи. Если одной из величин задаться произвольно, например напряжением (током), то ток (напряжение) будет вполне определенным, так что их нельзя задавать независимо друг от друга. Любую пару зависимых функций $u(t)$ и $i(t)$, одна из которых может задаваться произвольно, называют допустимой для рассматриваемой цепи.

Выделенная в двухполюсной цепи к моменту времени t энергия равна энергии, отдаваемой действующим на входе источником. Значение ее выражается интегралом

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p \, dt = \int_{-\infty}^t ui \, dt,$$

где $p = ui$ — мощность.

Если принять начальный запас энергии в цепи $w(0)$ равным нулю, что не повлияет на последующие определения, то нижний предел в интеграле можно принять равным нулю.

Сформулируем условие пассивности двухполюсной цепи. Двухполюсная цепь пассивна, если для всех возможных допустимых значений u и i и для всех моментов времени в интервале $0 < t < \infty$ энергия не принимает отрицательных значений

$$w(t) = \int_0^t ui \, dt \geq 0 \quad (\text{для всех } t).$$

В данном определении очень существенным моментом является то, что энергия должна быть положительной при действии не одного определенного сигнала, а сигналов любой возможной формы.

Для многополюсной цепи будем иметь n пар также зависимых друг от друга напряжений и токов u_k и i_k . Энергия, выделяемая в цепи или отдаваемая всеми источниками, действующими на n входах, будет, очевидно, равна сумме энергий, поступающих через

каждый вход. Поэтому условие пассивности n -полюсной цепи можно записать:

$$w(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t u_k i_k dt \geq 0 \quad (\text{для всех } t).$$

Здесь u_k и i_k — любая допустимая по свойствам цепи пара значений напряжения и тока k -го входа.

Любой элемент и любая цепь, не удовлетворяющие условию пассивности, являются активным элементом и активной цепью. Следовательно, энергия, потребляемая активной цепью для некоторых моментов времени $t = t_i$, принимает отрицательные значения:

$$w(t_i) = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_i} u_k(t) i_k(t) dt < 0.$$

То, что потребляемая энергия при некоторых сигналах или частотах становится отрицательной, означает возможность усиления мощности и генерации колебаний активной цепью.

Условие пассивности или положительности потребляемой энергии, приведенное выше и записанное во временной области, существенно ограничивает свойства и возможности пассивных цепей. Но при записи условия во временной области с необходимостью проверки для всех мыслимых форм сигналов затруднительно получить более конкретные выводы.

Ограничения, налагаемые на свойства цепи условием пассивности, удобно формулировать применительно к функциям цепи — входным и передаточным: функциям сопротивления или проводимости и функциям передачи, которыми характеризуется цепь в частотной области.

Частотный метод, основанный на применении преобразований Фурье и Лапласа, является основным методом анализа линейных цепей с постоянными параметрами. В частотном методе предполагается действие сигнала определенной формы — в виде синусоидальной или нарастающей по экспоненте синусоидальной функции. Это обстоятельство устраняет все трудности, связанные с перебором всех возможных форм сигнала.

В случае двухполюсника допустимая пара сигналов при использовании частотного метода будет представляться как:

$$Z(s) I(s)e^{st} \quad \text{и} \quad I(s) e^{st},$$

где s — комплексная частота; $I(s)$ — изображение по Лапласу тока, $Z(s)$ — входное сопротивление.

В связи со сказанным ограничения, налагаемые на свойства цепи, формулируются применительно к функциям $Z(s)$ и параметрам $z_{ik}(s)$ цепи. Сначала устанавливаются ограничения и необходимые условия, которым должны удовлетворять входные функции пассивных двухполюсных цепей (гл. 1) и параметры, а также функции передачи, пассивных четырехполюсных цепей (гл. 2). Одновременно с изложением необходимых условий приводятся

приемы реализации функции цепей, т. е. построения цепей, и таким путем показывается достаточность установленных условий.

Свойства функций активных цепей и реализация функций передачи активными цепями рассматриваются в последних двух главах.

§ В.3. Параметры и функции двухполюсных и четырехполюсных цепей

Поведение двухполюсной цепи (рис. В.1, а) определяется одним параметром — функцией входного сопротивления (или входной проводимости), представляющего отношение изображений напряжения и тока на входе:

$$Z(s) = 1/Y(s) = U(s)/I(s) \quad (\text{В.1})$$

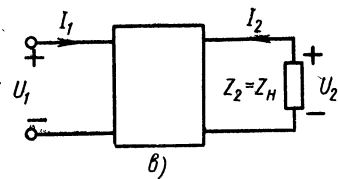
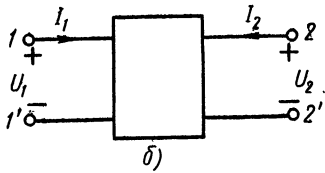
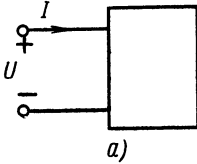


Рис. В.1

Свойства входной функции двухполюсника представляют особый интерес в связи с тем, что любая цепь составляется из двухполюсников.

Поведение обратимой четырехполюсной цепи (рис. В.1, б) определяется тремя параметрами, а необратимой — четырьмя. В синтезе наибольший интерес представляют параметры проводимостей и дуальные ей параметры сопротивлений.

Уравнения четырехполюсника через параметры проводимостей:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}U_1(s) + y_{12}U_2(s); \\ I_2(s) &= y_{21}U_1(s) + y_{22}U_2(s), \end{aligned} \quad (\text{В.2})$$

где y_{11} , y_{22} являются входными проводимостями четырехполюсника со стороны входа и выхода в режиме короткого замыкания соответствующих выводов; y_{12} , y_{21} — передаточные проводимости в режиме короткого замыкания выводов.

Уравнения через параметры сопротивлений:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= z_{11}I_1(s) + z_{12}I_2(s); \\ U_2(s) &= z_{21}I_1(s) + z_{22}I_2(s), \end{aligned} \quad (\text{В.3})$$

где z_{11} , z_{22} — входные сопротивления четырехполюсника со стороны входа и выхода в режиме разрыва соответствующих выводов; z_{12} , z_{21} — передаточные сопротивления в режиме разрыва выводов.

Четырехполюсная цепь обычно служит для передачи сигнала от входа, где включен источник напряжения или тока, к нагрузке

на выходе в виде двухполюсника с сопротивлением Z_2 (рис. В.1, в). Передающие свойства четырехполюсника характеризуются функциями передачи.

При действии источника напряжения применяют функцию передачи напряжения, представляющую отношение изображений напряжения на выходе и напряжения на входе:

$$H_U(s) = U_2(s)/U_1(s) = Z_2 Y_{12}(s), \quad (\text{В.4})$$

где $Y_{12}(s) = I_2(s)/U_1(s)$ — проводимость передачи.

При действии источника тока вводят функцию передачи тока — отношение изображений тока на выходе и тока на входе:

$$H_I(s) = I_2(s)/I_1(s) = Y_2 Z_{12}(s), \quad (\text{В.5})$$

где $Z_{12}(s) = U_2(s)/I_1(s)$ — сопротивление передачи.

Из второго уравнения (В.2) при подстановке $I_2(s) = -Y_2 U_2(s)$ для функции передачи напряжения получим

$$H_U(s) = \frac{-y_{21}}{y_{22} + Y_2}. \quad (\text{В.6})$$

Из второго уравнения (В.3) при учете $U_2(s) = -Z_2 I_2(s)$ для функции передачи тока имеем

$$H_I(s) = \frac{-z_{21}}{z_{22} + Z_2}. \quad (\text{В.7})$$

Как видно, функции передачи четырехполюсников, питаемых от источников напряжения и тока с нулевыми внутренними сопротивлениями и проводимостью, определяются только двумя параметрами.

Входные функции Z , Y и функции передачи H_U , H_I цепи называют обобщенно функциями цепи. К функциям цепи, очевидно, можно отнести z и y параметры четырехполюсника, представляющие входные и передаточные функции при нулевых значениях сопротивления и проводимости нагрузки.

Функция цепи представляет отношение изображения $F_2(s)$ интересующей реакции (на выходе или входе) и изображения $F_1(s)$ сигнала на входе четырехполюсника:

$$H(s) = F_2(s)/F_1(s). \quad (\text{В.8})$$

Электрические цепи, составленные из сосредоточенных элементов, описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами. Соответственные им преобразованные по Лапласу уравнения будут алгебраическими уравнениями с вещественными коэффициентами. Поэтому функция цепи, выражаемая в виде отношений определителей, представляет дробно-рациональную функцию комплексной частоты:

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}. \quad (\text{В.9})$$

Корни s'_k полинома $M(s)$ являются нулями, а корни s_k полинома $N(s)$ — полюсами функции цепи. Представив числитель и знаменатель в виде произведений двучленов, можем записать функцию цепи через нули и полюсы, положив $K = a_m/b_n$:

$$H(s) = K \frac{(s-s'_1)(s-s'_2)\dots(s-s'_m)}{(s-s_2)(s-s_2)\dots(s-s_n)}. \quad (\text{B.10})$$

При действии единичного импульсного сигнала $F_1(s) = 1$ изображение выходной реакции, представляющей импульсную характеристику цепи, равно $F_2(s) = H(s)$, так что функция цепи является изображением импульсной характеристики $h(t)$, т. е. реакции цепи в свободном режиме.

Отметим на основе общих физических соображений некоторые свойства функций цепи, которые будут уточнены и дополнены в следующей главе.

Коэффициенты числителя и знаменателя (B.9) вещественны, поэтому комплексные нули и полюсы функции цепи являются всегда попарно сопряженными. На плоскости s нули и полюсы располагаются симметрично относительно вещественной оси.

Полюсы функции передачи s_k являются частотами собственных колебаний. В силу устойчивости пассивных цепей при $t \rightarrow \infty$ импульсная характеристика должна затухать: $h(t) \rightarrow 0$.

Отсюда следует: полюсы функции устойчивой цепи или нули полинома $N(s)$ должны лежать в левой полуплоскости. В предельном случае могут быть простые полюсы на мнимой оси, которые приводят к колебаниям ограниченной амплитуды. Полиномы, нули которых лежат в левой полуплоскости, называют полиномами Гурвица.

Вещественный отрицательный нуль $s_i = -\alpha_i$ и пара сопряженных нулей с отрицательной вещественной частью $s_k = -\alpha_k \pm \pm j\beta_k$ дадут множители с положительными коэффициентами вида

$$(s + \alpha_i)(s^2 + 2\alpha_k + \alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

При перемножении подобных множителей получится полином с положительными коэффициентами, содержащий все степени s . Наличие всех степеней полинома и положительность коэффициентов — необходимые (но недостаточные) условия полинома Гурвица.

Что касается нулей функции цепи, то их положение зависит от вида функции. Нули входных функций должны лежать, так же как и полюсы, в левой полуплоскости. Нули функций передачи могут лежать как в левой, так и в правой полуплоскости.

При отсутствии нулей в правой полуплоскости функцию передачи называют минимально фазовой, а при наличии хотя бы одного нуля в правой полуплоскости — неминимально фазовой.

§ В.4. Частотные характеристики. Определение выражения функции цепи

Разобьем числитель и знаменатель (В.9) на четный и нечетный полиномы:

$$\begin{aligned} M(s) &= M_2(s^2) + sM_1(s^2); \\ N(s) &= N_2(s^2) + sN_1(s^2), \end{aligned}$$

где M_1 и M_2 ; N_1 и N_2 — четные полиномы.

Функцию цепи (В.9) можно записать

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M_2 + sM_1}{N_2 + sN_1}. \quad (\text{В.11})$$

При $s = j\omega$, соответствующем установившемуся синусоидальному режиму, получим

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = \\ &= \frac{M_2(-\omega^2) + j\omega M_1(-\omega^2)}{N_2(-\omega^2) + j\omega N_1(-\omega^2)} = \frac{M_2N_2 + \omega^2 M_1N_1}{N_2^2 + \omega^2 N_1^2} + \\ &+ j\omega \frac{M_1N_2 - M_2N_1}{N_2^2 + \omega^2 N_1^2}. \end{aligned} \quad (\text{В.12})$$

Здесь M_iN_i и N_i^2 являются полиномами от ω^2 , т. е. четными полиномами.

Составляющие $H(j\omega)$ представляют частотные характеристики цепи.

Вещественная характеристика согласно (В.12) является четной функцией — отношением четных полиномов:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{2} [H(j\omega) + H(-j\omega)] = \\ &= \frac{C_v\omega^{2v} + C_{v-1}\omega^{2(v-1)} + \dots + C_1\omega^2 + C_0}{B_n\omega^{2n} + B_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \dots + B_1\omega^2 + B_0}. \end{aligned} \quad (\text{В.13})$$

Здесь степень числителя $2v = m + n$, если m и n четны или нечетны и $2v = m + n - 1$, если m четно (нечетно), а n нечетно (четно).

Мнимая характеристика согласно (В.12) является нечетной функцией — отношением нечетного полинома к четному

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2} [H(j\omega) - H(-j\omega)] = \\ &= \frac{\omega(D_\mu\omega^{2\mu} + D_{\mu-1}\omega^{2(\mu-1)} + \dots + D_1\omega^2 + D_0)}{B_n\omega^{2n} + B_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \dots + B_1\omega^2 + B_0}. \end{aligned} \quad (\text{В.14})$$

Квадрат модуля, представляющего четную функцию, можно записать с учетом (В.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{M_2^2 + \omega^2 M_1^2}{N_2^2 + \omega^2 N_1^2} = \\ &= \frac{A_m\omega^{2m} + A_{m-1}\omega^{2(m-1)} + \dots + A_1\omega^2 + A_0}{B_n\omega^{2n} + B_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \dots + B_1\omega^2 + B_0}. \end{aligned} \quad (\text{В.15})$$

Тангенс фазового угла

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi(\omega) &= \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = \frac{\omega(M_1 N_2 - M_2 N_1)}{M_2 N_2 + M_1 N_1} = \\ &= \frac{\omega(D_\mu \omega^{2\mu} + \dots + D_1 \omega^2 + D_0)}{C_v \omega^{2\nu} + \dots + C_1 \omega^{2\nu} + C_0}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

В качестве примера запишем частотные характеристики функции цепи третьего порядка, нули и полюсы которой лежат в левой полуплоскости:

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}.$$

Имеем:

$$M_1 = 1; \quad N_1 = 6 + s^2;$$

$$M_2 = 1 + s^2; \quad N_2 = 4 + 4s^2.$$

При $s = j\omega$:

$$M_1 = 1; \quad N_1 = 6 - \omega^2;$$

$$M_2 = 1 - \omega^2; \quad N_2 = 4 - 4\omega^2.$$

Согласно (B.12) получим следующие выражения частотных характеристик:

1) вещественная составляющая

$$R(\omega) = \frac{(1 - \omega^2)(4 - 4\omega^2) + \omega^2(6 - \omega^2)}{(4 - 4\omega^2)^2 + \omega^2(6 - \omega^2)^2} = \frac{3\omega^4 - 2\omega^2 + 4}{\omega^6 + 4\omega^4 + 4\omega^2 + 16}.$$

2) мнимая составляющая

$$X(\omega) = \omega \frac{(4 - 4\omega^2) + (1 - \omega^2)(6 - \omega^2)}{(4 - 4\omega^2)^2 + \omega^2(6 - \omega^2)^2} = \frac{\omega^4 - 11\omega^2 + 10}{\omega^6 + 4\omega^4 + 4\omega^2 + 16}.$$

3) квадрат модуля

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}{(4 - 4\omega^2)^2 + \omega^2(6 - \omega^2)^2} = \frac{\omega^4 - \omega^2 + 1}{\omega^6 + 4\omega^4 + 4\omega^2 + 16}.$$

4) тангенс фазового угла

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = \frac{\omega(\omega^4 - 11\omega^2 + 10)}{3\omega^4 - 2\omega^2 + 4}.$$

Перейдем теперь к решению обратной задачи — нахождению функции по известным дробно-рациональным выражениям частотных характеристик. Принципиальная возможность определения функции цепи по одной из частотных характеристик следует из того, что составляющие функции комплексной переменной или комплексного спектра связаны между собой интегральными соотношениями [7].

1. *Определение функции цепи по модулю.*

Пусть задана четная рациональная дробь от ω^2 в виде (B.15) квадрата модуля функции цепи: степень числителя не превышает степени знаменателя более чем на два.

Для определения функции цепи $H(s)$ в выражении (В.15) полагаем $j\omega = s$, $\omega^2 = -s^2$:

$$L(-s^2) = H(s)H(-s) = \frac{M(s)M(-s)}{N(s)N(-s)} = \frac{V(-s^2)}{Q(-s^2)}, \quad (\text{В.17})$$

где $V(-s^2)$ и $Q(-s^2)$ — четные полиномы: числитель и знаменатель заданной функции квадрата модуля при $\omega^2 = -s^2$.

Нулями знаменателя $L(-s^2)$ являются нули $N(s)$ искомой функции цепи, лежащие в левой полуплоскости, и нули $N(-s)$, представляющие отображения нулей $N(s)$ относительно мнимой оси в правой полуплоскости. Следовательно, нули знаменателя (а также числителя) $L(-s^2)$ имеют квадратную симметрию (рис. В.2).

Нули $N(s)N(-s)$ определяются из решения уравнения $Q(-s^2) = 0$. В общем случае нули $Q(-s^2)$ относительно s^2 будут комплексными сопряженными; пара таких нулей имеет вид $s_{a,b}^2 = a^2 e^{\pm j\alpha}$. После извлечения квадратного корня получим четыре нуля относительно s , расположенные в квадратной симметрии:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= ae^{\pm j\alpha/2} = a_1 \pm ja_2; \\ s_{3,4} &= ae^{\pm j(\pi + \alpha/2)} = -a_1 \pm ja_2. \end{aligned} \quad (\text{В.18})$$

В частном случае вещественного положительного нуля $s_a^2 = a^2$ ($\alpha = 0$) получим нули s на вещественной оси слева и справа от начала.

В случае $\alpha = \pi$ и $s_a^2 = -a^2$ получим два сопряженных мнимых нуля $s_{1,2} = \pm ja$. Для обеспечения квадратной симметрии нули на мнимой оси должны иметь четную кратность.

Из всех нулей, удовлетворяющих квадратной симметрии, в качестве нулей знаменателя $N(s)$ функции цепи необходимо принять все нули, лежащие в левой полуплоскости, и половину нулей на мнимой оси.

Аналогичным образом определяются нули числителя $M(s)$, за исключением последней стадии: дело в том, что нули функции передачи могут находиться в правой полуплоскости. Если в качестве нулей $M(s)$ принять все нули $L(-s^2)$, лежащие в левой полуплоскости, получим минимально фазовую функцию; если же принять часть нулей правой полуплоскости и часть нулей левой полуплоскости, получим неминимально фазовую функцию передачи. Следовательно, здесь нет однозначного решения — ряд функций может иметь одинаковый модуль, но разные фазы. Однозначно определяется только функция минимальной фазы.

2. Определение функции цепи по вещественной части.

Функция цепи может быть определена однозначно по вещественной части только в том случае, если не имеет полюсов на мнимой оси, так как такие полюсы дают при $s = j\omega$ только мни-

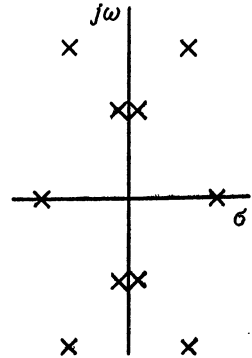


Рис. В.2

мые слагаемые (если не учитывать связанных с полюсами на $j\omega$ импульсных функций).

Пусть задана четная рациональная дробь вида (В.13), представляющая вещественную часть функции цепи.

Положив в (В.13) $j\omega = s$, имеем

$$G(-s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M(s)N(-s) + M(-s)N(s)}{N(s)N(-s)} = \frac{P(-s^2)}{Q(-s^2)}, \quad (\text{В.19})$$

где $P(-s^2)$ и $Q(-s^2)$ — четные числитель и знаменатель заданной функции при $\omega^2 = -s^2$.

Из сравнения с (В.17) видно, что знаменатель $N(s)$ можно определить таким же образом, как в случае, когда задан модуль.

Следовательно, коэффициенты b_i (см. В.9) знаменателя известны. Для определения неизвестных коэффициентов a_i числителя представим полиномы M и N в левую часть числителя (В.19) и приравняем полиному $P(-s^2)$ согласно (В.13), где положим $\omega^2 = -s^2$:

$$a_0 b_0 + (a_0 b_2 + b_0 a_2 - a_1 b_1) s^2 + \dots = C_0 - C_1 s^2 + C_2 s^4 - \dots$$

Получается следующая система линейных уравнений для определения искомых коэффициентов числителя a_i :

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= a_0 b_0, \\ -C_1 &= a_0 b_2 + a_2 b_0 - a_1 b_1, \\ C_2 &= a_0 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_0 - a_1 b_3 - a_3 b_1, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ C_k &= \sum_{i=-k}^k (-1)^{k+i} a_{k+i} b_{k-i}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{В.20})$$

Аналогичным образом можно определить функцию цепи по ее мнимой части.

В качестве примера найдем функцию цепи по дробно-рациональным выражениям частотных характеристик.

1. Пусть квадрат модуля равен

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2 + 1}{\omega^6 + 4\omega^4 + 4\omega^2 + 16}.$$

Полагаем $j\omega = s$; $\omega^2 = -s^2$

$$|H(s)|^2 = \frac{s^4 + s^2 + 1}{-s^6 + 4s^2 - 4s^2 + 16}.$$

Корни знаменателя относительно s^2 равны:

$$s_a^2 = 4; \quad s_{b,c}^2 = \pm j2.$$

Корни знаменателя относительно s равны:

$$s_{1,2} = \pm \dot{2}; \quad s_{3,4} = \sqrt[4]{2} e^{\pm j\pi/4}; \quad s_{5,6} = \sqrt[4]{2} e^{\pm j3\pi/4}.$$

Приняв в качестве полюсов функции устойчивой цепи корни, лежащие в левой полуплоскости: $s_2 = -2$; $s_{5,6} = -1 \pm j$, получим

$$N(s) = (s+2)[(s+1)^2 + 1] = s^3 + 4s^2 + 6s + 4.$$

Корни числителя относительно s^2 и s равны:

$$s_{a,b}^2 = -0,5 \pm j\sqrt{3}/2 = e^{\pm j2\pi/3}; \quad s_{1,2} = e^{\pm j\pi/3}; \quad s_{3,4} = e^{\mp j4\pi/3}.$$

Поскольку нули функции передачи могут находиться как в левой, так и правой полуплоскости, то можно получить две функции цепи, имеющие заданный модуль. При учете нулей, лежащих в левой полуплоскости: $s_{3,4} = -0,5 \pm j\sqrt{3}/2$, числитель

$$M(s) = (s+0,5)^2 + (3/4) = s^2 + s + 1.$$

2. Пусть вещественная характеристика равна

$$R(\omega) = \frac{3\omega^4 - 2\omega^2 + 4}{\omega^6 + 4\omega^4 + 4\omega^2 + 16}.$$

Знаменатель функции цепи определяется так же, как в предыдущем примере. Поэтому

$$N(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4.$$

Оцениваем степень числителя: $m = 2v - n + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$.

Согласно (В.20) имеем уравнения:

$$\begin{aligned} 4 &= a_0 4; \quad a_0 = 1; \\ 2 &= 4 - 4a_2 - a_1 6; \\ 3 &= 4a_2 - a_1. \end{aligned}$$

Уравнения удовлетворяются при $a_1 = a_2 = 1$, поэтому

$$M(s) = s^2 + s + 1.$$

§ В.5. Параметры рассеяния

До сих пор двухполюсная и четырехполюсная цепи характеризовались параметрами проводимости (Y ; y_{ik}) или сопротивления (Z ; z_{ik}). Эти параметры удобны в тех случаях, когда интересуются напряжениями или токами на входе и выходе четырехполюсника. Переменными уравнений цепи через параметры сопротивления и проводимости являются действительные напряжения и токи. Поскольку речь идет о линейной цепи, то в качестве переменных можно, очевидно, принимать любые линейные комбинации токов и напряжений входа и выхода, т. е. токи и напряжения можно разлагать на составляющие, которые будут входить в соответствующие уравнения, связывающие указанные составляющие.

Большой интерес во многих практических задачах представляет вопрос передачи мощности от источника к заданной нагрузке через четырехполюсник. В этом случае более удобно харак-

теризовать четырехполюсник так называемыми параметрами рассеяния. В качестве переменных уравнений цепи через параметры рассеяния принимаются линейные комбинации напряжений и токов на входе и выходе цепи. Эти переменные, называемые падающими и отраженными волнами напряжения и тока, введены по аналогии с величинами, характеризующими процессы в цепях с распределенными параметрами. Токи и напряжения на входе и выходе цепи будут представляться наложением составляющих: падающих и отраженных волн.

Рассмотрим сначала параметры рассеяния применительно к двухполюсным цепям.

На рис. В.3, а изображено сопротивление $Z = r + jx$ пассивного двухполюсника (нагрузка), питаемое от источника напряжения U_1 , с внутренним сопротивлением

$$Z_1 = r_1 + jx_1.$$

Будем интересоваться током в цепи и напряжением на нагрузке, которые можно выразить в общем случае следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_1}{Z_1 + Z}; \\ U &= \frac{ZU_1}{Z_1 + Z}. \end{aligned} \quad (\text{В.21})$$

Положим записанные величины (ток и напряжение нагрузки), состоящими из наложения составляющих: падающей I_n , U_n и отраженной I_o , U_o волн.

Падающие волны напряжения и тока принимают направленными от источника к нагрузке в режиме полного или оптимального согласования нагрузки с источником, достигаемого при $Z = Z_1^*$: $r = r_1$; $x = -x_1$. Следовательно, падающие волны тока и напряжения:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{U_1}{Z_1 + Z_1^*} = \frac{U_1}{2r}; \\ U_n &= \frac{ZU_1}{Z_1 + Z_1^*} = \frac{U_1 Z_1^*}{2r}. \end{aligned} \quad (\text{В.22})$$

Отношение падающих волн напряжения и тока определяется сопряженным значением сопротивления источника:

$$U_n / I_n = Z_1^*; \quad U_n = Z_1^* I_n. \quad (\text{В.23})$$

Оптимальное согласование в случае комплексного Z возможно только на одной частоте.

При рассогласовании нагрузки с источником, когда $Z \neq Z_1^*$, ток и напряжение на нагрузке будут отличаться от значений (В.22). Для учета отклонения от режима оптимального согласования, т. е. рассогласования, вводят отраженные ток и напряжение, пропорциональные падающим току и напряжению:

$$\begin{aligned} I_o &= -(I - I_n) = \rho_I I_n; \\ U_o &= (U - U_n) = \rho_U U_n. \end{aligned} \quad (\text{В.24})$$

Знак минус перед током показывает, что отраженный ток будет направлен справа налево — встречно выбранному положительному направлению тока; положительная полярность верхнего проводника сохраняется и для отраженной волны напряжения, поэтому у последней принят положительный знак.

Коэффициенты ρ_I и ρ_U , называемые коэффициентами отражения тока и напряжения, являются отношениями отраженной и падающей волн тока и напряжения:

$$\begin{aligned} \rho_I &= \frac{I_o}{I_n} = 1 - \frac{I}{I_n}; \\ \rho_U &= \frac{U_o}{U_n} = \frac{U}{U_n} - 1. \end{aligned} \quad (\text{В.25})$$

Заменив отношения токов и напряжений в соответствии с (В.21) и (В.22), получим:

$$\begin{aligned} \rho_I &= \frac{Z - Z_1^*}{Z + Z_1^*}; \\ \rho_U &= \frac{Y_1^* - Y}{Y_1 + Y}. \end{aligned} \quad (\text{В.26})$$

Коэффициенты отражения тока и напряжения обращаются в нуль при $Z = Z_1^*$ и $Y = Y_1^*$, т. е. при соблюдении условия оптимального согласования нагрузки и источника — в этом случае отраженные волны не возникают.

Отношение отраженных напряжения и тока согласно (В.24), (В.22) и (В.26) определяется сопротивлением источника:

$$\frac{U_o}{I_o} = \frac{\rho_U}{\rho_I} \cdot \frac{U_n}{I_n} = \frac{\rho_U}{\rho_I} Z_1^* = Z_i. \quad (\text{В.27})$$

Отсюда связь между коэффициентами отражения напряжения и тока

$$\rho_U = (Z_1/Z_i)^* \rho_I = e^{-j2\varphi} \rho_I, \quad (\text{В.28})$$

где φ — фазовый угол сопротивления источника Z_i .

Интересующие ток и напряжение нагрузочной ветви согласно (В.24) получаются наложением падающей и отраженной волн:

$$\begin{aligned} I &= I_n - I_o; \\ U &= U_n + U_o. \end{aligned} \quad (\text{В.29})$$

Подобным же образом, как известно, представляют напряжение и ток нагрузки, подключенной к источнику напряжения через линию с распределенными параметрами. Положив для исключения влияния запаздывания сигнала длину линии малой — в пределе равной нулю, рассмотрим с целью иллюстрации процессы в линии. Примем сопротивление источника Z_1 равным волновому сопротивлению r_1 линии с распределенными постоянными (режим согласования в начале линии); падающие волны напряжения и тока на линии

$$I_{\text{п}} = U_1/2r_1; \quad U_{\text{п}} = U/2.$$

Эти волны будут перемещаться по линии от начала к концу. После прихода падающих волн к концу линии в случае $Z \neq r_1$ произойдет отражение от нагрузки — часть падающих волн в виде отраженных волн напряжения и тока направится к началу. Величины отраженных тока и напряжения:

$$I_{\text{o}} = \rho_I I_{\text{п}} = \frac{Z - r_1}{Z + r_1} I_{\text{п}};$$

$$U_{\text{o}} = \rho_U U_{\text{п}} = \frac{r_1^{-1} - Y}{r_1^{-1} + Y} U_{\text{п}}.$$

Так как в начале линия согласована с источником, то отражений от входа не будет. Напряжение на нагрузке будет равно сумме, а ток — разности падающей и отраженной составляющих (В.29).

На рис. В.3, а условно волнистыми линиями со стрелками показаны направления перемещения падающей и отраженной волн.

Рассмотрим пример простейшей двухполюсной цепи (рис. В.3, б) с нормированными единичными значениями элементов. Сопротивления источника и нагрузки равны соответственно:

$$Z_1 = s + 1; \quad Z = 1 + 1/s.$$

Согласно (В.22) падающие ток и напряжение ($r_1 = 1$):

$$I_{\text{п}} = U_1/2; \quad U_{\text{п}} = \frac{U_1}{2} (1 - 1/s).$$

Коэффициенты отражения тока и напряжения:

$$\rho_I = \frac{Z - Z_1^*}{Z + Z_1^*} = \frac{1 + s^{-1} - (1 - s)}{1 + s^{-1} + 1 + s} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1};$$

$$\rho_U = \frac{Y_1^* - Y}{Y_1^* + Y} = \frac{(1 - s)^{-1} - (1 + 1/s)^{-1}}{(1 + s)^{-1} + (1 + 1/s)^{-1}} = \frac{(s + 1)(s^2 + 1)}{(1 - s)(s^2 + 2s + 1)}.$$

Удобно произвести нормировку, которая позволила бы получить одинаковые безразмерные выражения для напряжения и тока падающей волны и отраженной волны, для которых вводится один нормированный коэффициент отражения. В качестве нормированных падающей a и отраженной b волн принимают

$$a = \sqrt{R} I_{\text{п}} = \sqrt{G} e^{-j\varphi} U_{\text{п}};$$

$$b = \sqrt{R} I_{\text{o}} = \sqrt{G} e^{j\varphi} U_{\text{o}}. \quad (\text{В.30})$$

Нормированный коэффициент отражения, представляющий отношение нормированных отраженной и падающей волн, при учете (В.28)

$$\rho = \frac{b}{a} = \rho_I = \rho_U e^{j2\varphi}$$

совпадает с коэффициентом отражения для тока.

Двухполюсная цепь, следовательно, будет представляться одним уравнением, связывающим нормированные отраженную и падающую волны:

$$b = \rho a. \quad (\text{В.31})$$

Входящий сюда параметр — коэффициент отражения ρ является единственным параметром рассеяния, характеризующим двухполюсную цепь. Непосредственной подстановкой (В.30) в (В.31) можно убедиться, что одно уравнение (В.31) включает в себя два уравнения (В.24), записанные отдельно для тока и напряжения.

Перейдем теперь к рассмотрению параметров рассеяния четырехполюсных цепей. Проще всего ввести нормированные параметры для четырехполюсной (или n -полюсной) цепи путем обобщения рассмотренного случая двухполюсной цепи. Здесь будет цепь с двумя входами (рис. В.4); токи и напряжения как на первом, так и на втором входах можно представить в виде наложения падающей и отраженной волн. При введении нормировки, аналогичной нормировке двухполюсной цепи, можно иметь дело с безразмерными падающей и отраженными волнами как тока, так и напряжения. Для четырехполюсника будем иметь две падающие волны a_1 и a_2 , направленные от источников напряжения U_1 и U_2 к обоим входам, и две отраженные волны b_1 и b_2 , направленные от входов 1 и 2 четырехполюсника к источникам.

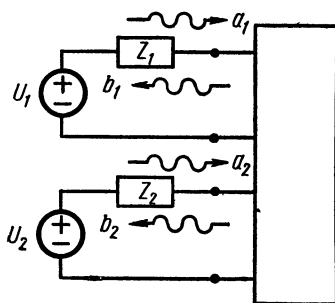


Рис. В.4

Связь между парой отраженных и парой падающих волн можем представить путем формального обобщения скалярного соотношения (В.31) на двумерный случай:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2; \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2. \end{aligned} \quad (\text{В.32})$$

Коэффициенты системы уравнений, которые можно записать в виде квадратной матрицы

$$S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{В.33})$$

являются параметрами рассеяния четырехполюсной цепи.

Для выяснения смысла параметров, входящих в (В.33), как обычно в теории четырехполюсников, следует положить сначала $a_2 \equiv 0$, что означает отсутствие падающей волны со стороны входа 2 (выхода), затем $a_1 \equiv 0$, означающем отсутствие падающей волны со стороны входа 1. Для устранения падающих волн при сохранении элементов схемы следует замыкать накоротко выводы источников напряжения U_2 и U_1 . Указанные режимы изображены на рис. В.5.

Собственные параметры S_{11} и S_{22} являются коэффициентами отражения в случаях отсутствия падающих волн со стороны входа 2. (выхода) и входа 1 соответственно (рис. В.5):

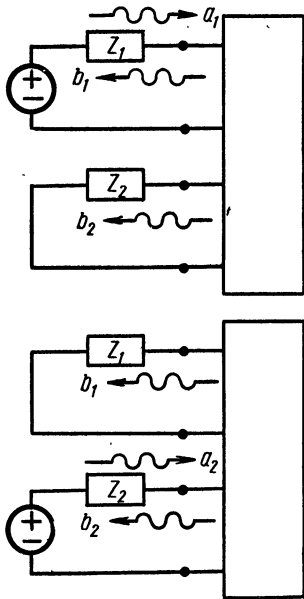


Рис. В.5

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} \text{ — отношение отраженной и падающей волн на входе 1 при } a_2=0 \text{ (при коротком замыкании выводов 2 — 2')};$$

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1=0} \text{ — отношение отраженной и падающей волн на входе 2 при } a_1=0 \text{ (короткое замыкание выводов 1 — 1')}.$$

Взаимные параметры S_{12} и S_{21} , называемые коэффициентами преломления, имеют смысл функций передачи четырехполюсника (рис. В.5):

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1=0} \text{ — отношение отраженной волны, направленной от четырехполюсника к входу 1 при действии падающей волны от входа 2 и коротком замыкании выводов 1 — 1'};$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0} \text{ — отношение отраженной волны, направленной от четырехполюсника к входу 2 при действии падающей волны от входа 1 и коротком замыкании 2 — 2'}.$$

Остановимся кратко на вычислениях параметров рассеяния. Переходя от нормированных волн к падающим и отраженным токам согласно (В.30) и учете (В.26), будем иметь для собственных параметров

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{\sqrt{R_1} I_{o1}}{\sqrt{R_1} I_{п1}} \Big|_{I_{п2}=0} = \frac{Z_{11} - Z_1^*}{Z_{11} + Z_1}, \quad (\text{В.34})$$

где Z_{11} — входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного сопротивлением Z_2 со стороны входа 1;

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1=0} = \frac{\sqrt{R_2} I_{o2}}{\sqrt{R_2} I_{п2}} \Big|_{I_{п1}=0} = \frac{Z_{22} - Z_2^*}{Z_{22} + Z_2}, \quad (\text{В.35})$$

где Z_{22} — входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного двухполюсником Z_1 (слева), со стороны входа 2 (выхода).

Для передаточного параметра S_{21} также путем перехода к ненормированным величинам получим

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{\sqrt{R_2} I_{o2}}{\sqrt{R_1} I_{n1}} \Big|_{I_{n2}=0} = \frac{\sqrt{R_2} (-I^2)}{\sqrt{R_1} U_1 / R_1} = -\sqrt{R_1 R_2} I_2 / U_1. \quad (\text{В.36})$$

Аналогичным образом, для второго передаточного параметра будем иметь

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1=0} = -\sqrt{R_1 R_2} I_1 / U_2. \quad (\text{В.37})$$

Как видим, параметры S_{21} и S_{12} пропорциональны проводимостям передачи цепи слева направо и справа налево соответственно.

Если цепь является обратимой, то, очевидно, $S_{21} = S_{12}$, и матрица рассеяния (В.33) симметрична. Для симметричной цепи, нагруженной на одинаковое сопротивление $Z_1 = Z_2$ на обоих входах, получим $S_{11} = S_{22}$.

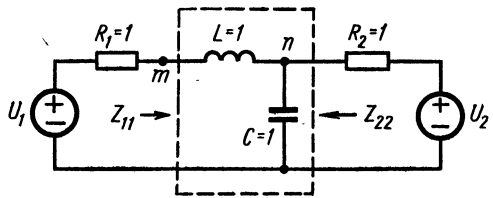


Рис. В.6

Рассмотрим простейший пример несимметричной Г-образной реактивной цепи (рис. В.6) с нормированными единичными элементами, нагруженной на обоих входах одинаковыми резистивными элементами $R_1 = R_2$. Задавшись единичным током на правом короткозамкнутом конце, имеем следующие относительные значения токов и напряжений в цепи:

$$\begin{aligned} -I'_2 &= 1; & U'_n &= 1; \\ I'_1 &= s + 1; \\ U'_m &= s^2 + s + 1; \\ U'_1 &= s^2 + 2s + 2. \end{aligned}$$

Для определения коэффициента отражения имеем $Z_{11} = \overset{*}{Z}_1$ и

$$Z_{11} = \frac{U_m}{I_1} = \frac{U'_m}{I'_1} = \frac{s^2 + s + 1}{s + 1}.$$

Коэффициент отражения на входе 1 согласно (В.34)

$$S_{11} = \frac{Z_{11} - 1}{Z_{11} + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 2}.$$

Взаимный параметр рассеяния согласно (В.36)

$$S_{21} = -\sqrt{R_1 R_2} \frac{I_2}{U_1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = S_{12}.$$

Аналогичным образом, задавшись единичным током на левом короткозамкнутом конце, получим:

$$\begin{aligned} -I'_1 &= 1; & U'_m &= 1; \\ U' &= s + 1; \\ I'_2 &= s^2 + s + 1; \\ U'_2 &= s^2 + 2s + 2. \end{aligned}$$

Входное сопротивление четырехполюсника справа

$$Z_{22} = \frac{U}{I_2} = \frac{U'}{I'_2} = \frac{s^2 + s}{s^2 + s + 1}.$$

Коэффициент отражения на входе 2

$$S_{22} = \frac{Z_{22} - 1}{Z_{22} + 1} = \frac{-1}{2s^2 + 2s + 1}.$$

Задачи

1. Даны дробно-рациональные функции комплексной частоты:

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 + 2s + 1};$$

$$F(s) = \frac{s(s+1)}{s^3 + 4s^2 + 2s + 1}.$$

Требуется записать выражения при $s = j\omega$:

- 1) вещественной и мнимой частей;
- 2) квадрата модуля и тангенс фазового угла.

2. Даны дробно-рациональные функции:

$$F(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s^2+4s+1)(s+1)};$$

$$F(s) = \frac{s(s+1,5)(s+2,5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Требуется, положив $s = j\omega$, записать выражения составляющих $F(j\omega)$ и построить графики частотных характеристик.

3. Определить фазовую и амплитудную характеристики для функций:

$$F(s) = \frac{(s-1)(s^2-s+2)}{(s+1)(s^2+s+2)};$$

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 16s + 9}.$$

4. По выражениям квадратов модулей $F(j\omega)$, найденным в примерах 1 и 2, определить функцию $F(s)$.

5. По выражениям вещественных частей, найденных в примерах 1 и 2, определить дробно-рациональную функцию $F(s)$.

Глава I

Свойства входных функций пассивных двухполюсных цепей и их реализация

§ 1.1. Энергетические функции цепи

В этой главе излагаются основные свойства входных функций (сопротивлений и проводимостей) пассивных двухполюсных цепей. Формулируются необходимые условия их физической реализуемости, рассматриваются свойства и реализация частных видов двухполюсников с двумя видами элементами.

В общем виде свойства входных функций двухполюсников и параметров, а также функций передачи четырехполюсников устанавливаются с помощью энергетических функций цепи.

Энергетические функции получают из системы уравнений контурных токов или узловых напряжений.

Запишем систему уравнений контурных токов цепи в операторной форме, полагая $I(s) = I$; $U(s) = U$:

$$Z_{k1}I_1 + Z_{k2}I_2 + \dots + Z_{kn}I_n = \sum_{i=1}^n Z_{ki}I_i = U_k; \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где $Z_{ki} = sL_{ki} + R_{ki} + (D_{ki}/s) = Z_{ik}$ — взаимное или собственное (при $i = k$) сопротивление контура; $D_{ki} = 1/C_{ki}$; U_k — изображение напряжения источников, действующих в контуре.

Если умножить каждое из уравнений на сопряженный ток I_k^* и просуммировать левые и правые части получившихся n уравнений, то будем иметь

$$\sum_{k, i=1}^n Z_{ki}I_i I_k^* = s \sum_{k, i=1}^n L_{k,i} I_i I_k^* + \sum_{k, i=1}^n R_{ki} I_i I_k^* + \frac{1}{s} \sum_{k, i=1}^n D_{ki} I_i I_k^* = sT_0 + F_0 + V_0/s = \sum_{k=1}^v U_k I_k^*, \quad (1.2)$$

где $v \leq n$ — число входов цепи, где действуют источники сигнала: в двухполюсной цепи $v = 1$, в четырехполюсной $v = 2$.

Здесь через T_0 , F_0 и V_0 , называемые энергетическими функциями, обозначены выражения:

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{k, l=1}^n L_{kl} I_l^* I_k; \\ F_0 &= \sum_{k, l=1}^n R_{k,l} I_l^* I_k; \\ V_0 &= \sum_{k, l=1}^n D_{kl} I_l^* I_k. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Изображения токов и, следовательно, энергетические функции зависят от комплексной частоты s .

В установившемся синусоидальном режиме ($s=j\omega$) правая часть (1.2) представляет комплексную мощность, отдаваемую источниками, а энергетические функции приобретают значения:

T_0 — удвоенного значения энергии, запасаемой в индуктивных элементах; F_0 — удвоенной мощности потерь в активных сопротивлениях; V_0 — умноженного на ω^2 удвоенного значения энергии, запасаемой в емкостях. Выражение (1.2)

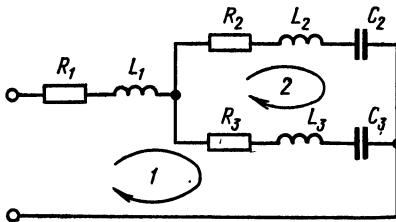


Рис. 1.1

отражает баланс мощностей в цепи — в левой части имеем активную мощность и реактивную мощность: $\omega(T_0 - V_0/\omega^2)$.

Из физического смысла энергетических функций следует, что они могут принимать только вещественные неотрицательные значения.

Рассмотрим пример двухконтурной цепи, приведенной на рис. 1.1, где указаны два выбранных контура с токами $I_1 = x_1 + jy_1$; $I_2 = x_2 + jy_2$, которые совпадают с токами в ветвях 1 и 2. Ток в ветви 3 равен $I_3 = I_1 - I_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$.

Запишем матрицу параметров контурных токов

$$\|Z\| = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} L_1 + L_3 & -L_3 \\ -L_3 & L_2 + L_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{s} \begin{vmatrix} D_3 & -D_3 \\ -D_3 & D_2 + D_3 \end{vmatrix}.$$

Составим для матрицы индуктивных параметров выражение суммы двух вещественных квадратичных форм:

$$\begin{aligned} T_0 &= (L_1 + L_3) x_1^2 - 2L_3 x_1 x_2 + (L_2 + L_3) x_2^2 + (L_1 + L_3) y_1^2 - 2L_3 y_1 y_2 + \\ &+ (L_2 + L_3) y_2^2 = L_1(x_1^2 + y_1^2) + L_2(x_2^2 + y_2^2) + L_3[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] = \\ &= L_1 |I_1|^2 + L_2 |I_2|^2 + L_3 |I_3|^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом:

$$F_0 = R_1 |I_1|^2 + R_2 |I_2|^2 + R_3 |I_3|^2;$$

$$V_0 = \frac{1}{C_2} |I_2|^2 + \frac{1}{C_3} |I_3|^2 = \omega^2 C_2 |U_{2c}|^2 + \omega^2 C_3 |U_{3c}|^2.$$

Полученные выражения содержат квадраты модулей токов, так что энергетические функции при любых значениях s и токов являются вещественными неотрицательными величинами.

К указанному выводу можно прийти также на основе формальных математических соображений. Для этого напомним сначала, что коэффициенты L_{ki} , R_{ki} и D_{ki} , входящие в выражения (1.3), являются параметрами уравнений контурных токов — взаимными и собственными (при $k=i$) индуктивностями, сопротивлениями и обратными емкостями контуров. Как известно, собственный параметр, например собственная индуктивность, представляется суммой параметров — индуктивностей всех ветвей, входящих в данный контур, а взаимный параметр, например взаимная индуктивность, представляется параметром — индуктивностью ветви общей для контуров k и i с отрицательным знаком.

Матрица параметров, в частности матрица индуктивностей, будет иметь вид

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Матрицы параметров контурных токов обладают следующими свойствами:

1) по главной диагонали располагаются положительные собственные параметры; все остальные элементы являются взаимными параметрами с отрицательными знаками;

2) матрица симметрична, так как один и тот же элемент входит взаимным параметром как в контур k , так и в контур i ;

3) значение диагонального элемента всегда больше или в предельном случае равно сумме всех остальных элементов той же строки

$$L_{kk} \geq \sum_{i=1}^n |L_{ki}|.$$

Приведенные выше в качестве примера матрицы параметров двухконтурной цепи подтверждают перечисленные свойства.

Покажем, что энергетические функции (1.3) при любых значениях комплексной частоты принимают только вещественные значения. Положив для любого $s = \sigma + j\omega$

$$I_i = x_i + jy_i; \quad \dot{I}_k = x_k - jy_k,$$

имеем

$$\tilde{I}_i \dot{I}_k = (x_i x_k + y_i y_k) + j(y_i x_k - x_i y_k).$$

Если подставить эти значения в (1.3), то мнимые части обратятся в нуль: в силу симметрии матриц параметров ($L_{ki}=L_{ik}$; $R_{ki}=R_{ik}$; $D_{ki}=D_{ik}$) каждому слагаемому с индексами ki будет соответствовать равное, но обратное по знаку слагаемое с индексами ik .

Для функции T_0 будем иметь

$$L_{ki}(y_i x_k - x_i y_k) + L_{ik}(y_k x_i - x_k y_i) = 0.$$

Энергетическая функция представляется следующим чисто вещественным выражением:

$$T_0 = \sum_{k, i=1}^n L_{ki} x_i x_k + \sum_{k, i=1}^n L_{ki} y_i y_k. \quad (1.5)$$

Аналогичный вид будут иметь функции F_0 и V_0 .

Энергетическая функция представляется суммой двух идентичных однородных многочленов второй степени от вещественных переменных. Однородный полином второй степени от n переменных x_i (или y_i) вида

$$P(x, x) = \sum_{k, i=1}^n L_{ki} x_i x_k$$

называют квадратичной формой. Приведем кратко некоторые необходимые для последующего изложения сведения о квадратичных формах.

Коэффициентами записанной вещественной квадратичной формы являются вещественные величины L_{ki} — элементы симметричной матрицы (1.4), называемой матрицей квадратичной формы.

Пусть задана симметричная квадратная матрица, например, второго порядка

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для получения квадратичной формы матрицу представляем в виде левой части линейных уравнений:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0;$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = 0.$$

Далее умножаем первое уравнение на x_1 , второе — на x_2 и складываем:

$$P(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Квадратичные формы полностью определяются своими матрицами. Выражение (1.5) состоит из двух квадратичных форм с одной и той же матрицей — они отличаются друг от друга только обозначениями переменных и поэтому их можно принимать идентичными.

Для нас особое значение будут иметь положительно определенные квадратичные формы. Вещественную квадратичную форму называют положительно определенной, если она при любых зна-

чениях переменных (за исключением одновременного равенства нулю) принимает только положительные значения:

$$P(x_i x_j) > 0.$$

Существует ряд критериев для определения положительно определенных квадратичных форм. Приведем один из этих критериев [12]: для того, чтобы вещественная квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы определитель и все главные миноры (расположенные в левом верхнем углу) ее матрицы были положительны.

Для простейшей квадратичной формы двух переменных с симметричной квадратной матрицей, приведенной выше, условие положительности запишется так:

$$a_{11} > 0; a_{22} > 0; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

На основе указанной теоремы и неравенства Адамара можно установить положительность энергетических функций, являющихся согласно (1.5) вещественными квадратичными формами.

Неравенство Адамара [12], касающееся свойства определителей, формулируется следующим образом.

Если определитель квадратной $n \times n$ матрицы A с вещественными элементами обладает свойствами: а) каждый диагональный элемент больше или равен сумме абсолютных значений остальных элементов той же строки

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i=1, 2, \dots, n);$$

б) матрица A одинаковыми перестановками строк и столбцов не приводима к виду

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix},$$

где A_{ii} — квадратные матрицы,
то определитель

$$\det A > 0.$$

Первое условие для матрицы (1.4) всегда выполняется, второе условие также выполняется для всех цепей с связными графами. Следовательно, согласно приведенному выше критерию положительно определенной квадратичной формы энергетическая функция (1.5) вещественна и положительна при всех значениях комплексной частоты.

Перейдем теперь к установлению свойств функций цепи на базе доказанного свойства вещественности и положительности энергетических функций. Начнем с рассмотрения правой части (1.2). В случае двухполюсной цепи с одним источником имеем одно слагаемое $U_1^* I_1$. Согласно закону Ома, правая часть

$$U_1^* I_1 = Z(s) |I_1|^2 = Y^*(s) |U_1|^2 \quad (1.6)$$

пропорциональна входному сопротивлению или сопряженной проводимости.

Выражение (1.2) для двухполюсной цепи с учетом (1.6) запишется как

$$sT_0 + F_0 + V_0/s = Z(s) |I_1|^2 = \dot{Y}^*(s) |U_1|^2. \quad (1.7)$$

В случае четырехполюсной цепи ($\nu=2$) в правой части (1.2) получим два слагаемых, которые можно выразить через параметры сопротивлений (В.3) при учете (1.4) следующим образом:

$$U_1 I_1^* + U_2 I_2^* = z_{11} |I_1|^2 + 2z_{21} \operatorname{Re} I_1 I_2^* + z_2 |I_2|^2 = z_{11} x_1^2 + 2z_{21} x_1 x_2 + z_{22} x_2^2 + z_{11} y_1^2 + 2z_{21} y_1 y_2 + z_{22} y_2^2. \quad (1.8)$$

Правая часть (1.2) выражена в виде суммы двух идентичных квадратичных форм, коэффициенты которых являются элементами матрицы сопротивления четырехполюсника.

Согласно (1.7) левая часть (1.2) является функцией $Z(s)$. Поскольку равенство (1.8) справедливо для любых значений x_i и y_i , то каждая из идентичных квадратичных форм является функцией входного сопротивления:

$$Z(s) = sT_0 + F_0 + V_0/s = z_{11} x_1^2 + 2z_{21} x_1 x_2 + z_{22} x_2^2. \quad (1.9)$$

§ 1.2. Положительные вещественные функции и их свойства

Если принять нормированные единичные значения тока или напряжения, то входное сопротивление и проводимость выразятся через энергетические функции согласно (1.7) следующим образом:

$$Z(s) = sT_0 + F_0 + V_0/s; \quad Y(s) = s^* T_0 + F_0 + V_0/s^*. \quad (1.10)$$

Из этого выражения при учете вещественности и положительности энергетических функций выводятся все свойства входного сопротивления и входной проводимости.

Прежде всего, если s вещественна и $s = \sigma$,

$$Z(\sigma) = \sigma T_0 + F_0 + V_0/\sigma.$$

При s вещественных $Z(s)$ вещественна — все коэффициенты входного сопротивления должны быть вещественными.

Далее, при $s = \sigma + j\omega$

$$Z(s) = r(\sigma, \omega) + jx(\sigma, \omega) = \sigma T_0 + F_0 + \frac{\sigma V_0}{\sigma^2 + \omega^2} + j\left(\omega T_0 - \frac{\omega V_0}{\sigma^2 + \omega^2}\right). \quad (1.11)$$

Если $\sigma > 0$, то вещественная часть $Z(s)$ не может принимать отрицательных значений.

Следовательно, функция входного сопротивления должна удовлетворять следующим условиям:

1) $Z(s)$ вещественна при s вещественных (на вещественной оси);

2) вещественная часть $\operatorname{Re} Z(s) \geq 0$ при $\operatorname{Re}(s) = \sigma \geq 0$, т. е. в правой полуплоскости.

Дробно-рациональные функции комплексного переменного, удовлетворяющие условиям 1 и 2, называют положительными вещественными функциями.

Входное сопротивление и входная проводимость пассивного двухполюсника должны быть положительными вещественными функциями.

Из общих свойств 1 и 2 входных сопротивлений и проводимостей пассивных цепей, являющихся дробно-рациональными положительными вещественными функциями, можно установить ряд следствий — частных свойств.

1. Если сопротивление $Z(s)$ является положительной вещественной функцией (п. в. ф.), то обратная ей величина — проводимость $Y(s)$ является также п. в. ф. Это положение следует из связи между вещественными и мнимыми частями $Z(s)$ и $Y(s)$:

$$Y(\sigma + j\omega) = \frac{1}{Z(\sigma + j\omega)} = \frac{1}{r(\sigma, \omega) + jx(\sigma, \omega)} = \frac{r(\sigma, \omega)}{r^2 + x^2} - j \frac{x(\sigma, \omega)}{r^2 + x^2}.$$

По определению $r(\sigma, \omega) \geq 0$ при $\sigma > 0$, поэтому $\operatorname{Re}[Y(s)] \geq 0$ при $\operatorname{Re}s \geq 0$.

Нули и полюсы $Z(s)$ являются соответственно полюсами и нулями $Y(s)$. Поэтому ограничения, установленные для нулей п. в. ф., автоматически становятся ограничениями на ее полюсы, а ограничения на полюсы — ограничениями на нули.

2. Нули и полюсы $Z(s)$ не могут лежать в правой полуплоскости, так что числитель и знаменатель функции сопротивления являются полиномами Гурвица. Это положение вытекает из того, что нули сопротивления должны удовлетворять условию $Z(s) = 0$ или согласно (1.10)

$$s = -\frac{F_0}{2T_0} \pm \sqrt{(F_0/2T_0)^2 - V_0/T_0}. \quad (1.12)$$

Из положительности энергетических функций следует, что вещественные части комплексных нулей и вещественные нули должны быть отрицательными. Следовательно, функция $Z(s)$ является аналитической в правой полуплоскости — здесь нет ее полюсов.

Необходимо отметить, что условие (1.12) не дает значений нулей, так как сами энергетические функции сложным образом зависят от s .

Приведенный вывод также следует из следующей теоремы теории функций комплексного переменного: в окрестности полюса кратности μ вещественная и мнимая части функции изменяют свой знак 2μ раза.

Для доказательства рациональную дробь $F(s)$, имеющую наряду с простыми полюсами μ -кратный полюс s_1 , представим в виде суммы простых дробей:

$$F(s) = \frac{k_{11}}{(s-s_1)^\mu} + \frac{k_{12}}{(s-s_1)^{\mu-1}} + \dots + \frac{k_{1\mu}}{(s-s_1)} + \sum_{i=2}^n \frac{k_i}{s-s_i}, \quad (1.13)$$

где k_i — коэффициенты разложения или вычеты в полюсах s_i , в общем случае комплексные.

Если полюс s_1 обходить по окружности малого радиуса ρ (рис. 1.2, а), то в разложении (1.13) можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого. Положив $s - s_1 = \rho e^{j\theta}$ и $k_{11} = |k_{11}| e^{j\psi}$, имеем

$$F(s) \approx \frac{k_{11}}{(s-s_1)^\mu} = \frac{|k_{11}|}{\rho^\mu} e^{-j(\mu\theta-\psi)} = \frac{|k_{11}|}{\rho^\mu} \cos(\mu\theta - \psi) - j \frac{|k_{11}|}{\rho^\mu} \sin(\mu\theta - \psi). \quad (1.14)$$

При изменении θ от 0 до 2π вещественная часть непременно принимает отрицательное значение при любом $\mu > 0$ (рис. 1.2, б), поэтому у п. в. ф. в правой полуплоскости, где $\operatorname{Re} Z(s) \geq 0$, не должно быть полюса.

3. На мнимой оси п. в. ф. может иметь только простые полюсы (и нули) с положительными вещественными вычетами. Это положение следует также из (1.14). Если полюс s_1 лежит на оси $j\omega$ (рис. 1.2, в), то при обходе его по полуокружности в правой полуплоскости угол изменяется в пределах $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Легко убедиться, что неотрицательность вещественной части обеспечивается только при $\mu=1$ и $\psi=0$, т. е. в случае простого полюса с вещественным положительным вычетом.

4. Старшие степени, а также младшие степени числителя и знаменателя п. в. ф. не должны отличаться более чем на единицу. Это положение следует из того, что полюс и нуль при $s=\infty$ и $s=0$ принадлежат мнимой оси, где не должно быть кратных нулей и полюсов. Если $|m-n| > 1$, то при $s=\infty$ у $Z(s)$ появится кратный полюс или нуль.

Аналогично, если разница между младшими степенями превысит единицу, то при $s=0$ у $Z(s)$ появится кратный нуль или полюс.

5. Проверку положительности вещественной части во всей правой полуплоскости можно заменить более простой проверкой положительности вещественной части на мнимой оси $\operatorname{Re}[Z(j\omega)] \geq 0$. Это положение основано на следующей теореме теории функций комплексного переменного: *вещественная часть функции комплексного переменного принимает наибольшие и наименьшие значения на границе аналитичности.*

В случае п. в. ф. областью аналитичности (областью, где нет полюсов) является вся правая полуплоскость, а границей анали-

тичности — мнимая ось. Если на мнимой оси

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] \geq 0, \quad (1.15)$$

то согласно теореме $\operatorname{Re}[Z(s)] \geq 0$ при $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Перед проверкой условия (1.15) необходимо убедиться в том, что полюсов в правой полуплоскости нет, а полюсы на мнимой оси простые.

Условию (1.15) можно придать простой геометрический смысл с помощью векторной диаграммы, изображающей вектор $Z(s)$

согласно (1.10). Выбрав вектор s в правой полуплоскости (рис. 1.3), направляем вдоль него вектор sT_0 ; к нему под углом $(-\arg s)$ добавляем вектор V_0/s и параллельно вещественной

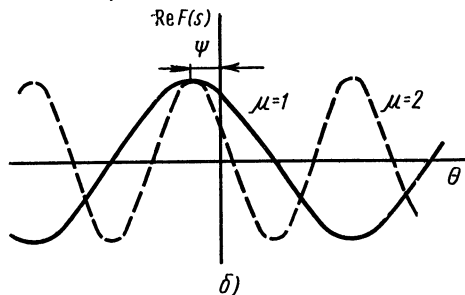
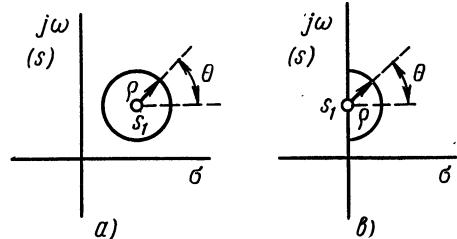


Рис. 1.2

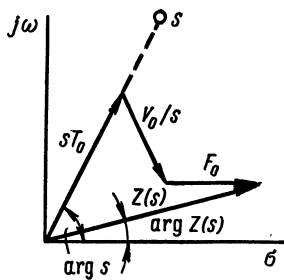


Рис. 1.3

оси — вектор F_0 . Как видно из диаграммы, угол вектора $Z(s)$, равного сумме трех составляющих векторов, всегда меньше угла s ($\sigma \geq 0$):

$$|\arg Z(s)| \leq |\arg s| \quad (\arg s \leq \pi/2). \quad (1.16)$$

Условие аргументов является записью условий п. в. ф. в полярных координатах.

При учете (1.15) условия, которым должна удовлетворять рациональная п. в. ф., можно сформулировать следующим образом:

- 1) нет полюсов и нулей в правой полуплоскости;
- 2) полюсы (а также нули) на мнимой оси простые с положительными вещественными вычетами;
- 3) вещественная часть $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$.

Остановившись на проверке того, является ли заданная дробно-рациональная функция п. в. ф., т. е. входной функцией пассивного двухполюсника. Прежде всего следует проверить необходимые (но недостаточные) условия такие, как отличие старших и младших степеней числителя и знаменателя не более чем на единицу,

наличие и положительность всех коэффициентов числителя и знаменателя. Далее необходимо установить отсутствие нулей и полюсов в правой полуплоскости, т. е. проверить устойчивость полиномов числителя и знаменателя. Эта проверка производится без нахождения корней полиномов с помощью критериев устойчивости Гурвица, Рауса или частотных критериев Михайлова и Найквиста. Один из простых способов проверки при численном задании коэффициентов состоит в разбиении полинома на четную и нечетную части и разложении их отношения в цепную дробь путем поочередного деления числителя на знаменатель, знаменателя остатка на числитель и т. д. до получения нулевого остатка. Условие устойчивости состоит в положительности всех коэффициентов цепной дроби. Разложение в цепную дробь широко используется для реализации функции входного сопротивления или проводимости цепей с двумя видами элементов и будет рассматриваться дальше. Поэтому здесь ограничимся тем, что на простейших примерах покажем применение разложения в цепные дроби для проверки устойчивости.

1. Задан полином третьего порядка

$$N(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = (s^3 + 2s) + (2s^2 + 1).$$

Отношение нечетной и четной частей

$$\frac{sN_1(s)}{N_2(s)} = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}.$$

Разложение в цепную дробь, состоящее в поочередном делении числителя на знаменатель и знаменателя остатка на числитель и т. д., можно получить следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} s^3 + 2s & 2s^2 + 1 \\ s^3 + 0,5s & 0,5s + \\ \hline 2s^2 + 1 & 1,5s \\ 2s^2 & \frac{4}{3}s + 1/1,5s \\ \hline 1 & \end{array}$$

Полученная цепная дробь

$$\frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1} = 0,5s + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{1,5s}}$$

имеет только положительные коэффициенты — полином устойчив.

2. Задан полином также третьего порядка

$$N(s) = s^3 + s^2 + s + 6 = (s^3 + s) + (s^2 + 6).$$

Используя примененную выше процедуру делений, получим для отношения нечетной и четной частей следующую дробь:

$$\frac{s^3 + s}{s^2 + 6} = s + \frac{1}{-\frac{1}{5}s + \frac{1}{-\frac{5}{6}s}}$$

Дробь имеет отрицательные коэффициенты — полином неустойчив, некоторые из его нулей лежат в правой полуплоскости; полином имеет положительный вещественный нуль или комплексные сопряженные нули с положительной вещественной частью.

Следующий этап проверки состоит в установлении неотрицательности вещественной части $Z(s)$ на мнимой оси. В § В.4 было установлено, что вещественная часть функции цепи при $s=j\omega$ представляется отношением двух четных полиномов. Если полиномы числителя и знаменателя разбиты на четную и нечетную части $M_2(s^2)$, $N_2(s^2)$; $sM_1(s^2)$ и $sN_1(s^2)$, то согласно (В.11) вещественная часть дроби

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{M_2(-\omega^2)N_2(-\omega^2) + \omega^2 M_1(-\omega^2)N_1(-\omega^2)}{N_2^2(-\omega^2) + \omega^2 N_1^2(-\omega^2)} = \frac{P(\omega^2)}{Q(\omega^2)}$$

представляет отношение четных полиномов от ω^2 . Полином знаменателя, очевидно, всегда положителен. Знак вещественной части определяется четным полиномом числителя, который можно записать, введя переменную $x = \omega^2$:

$$P(x) = K(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где $x_i = \omega_i^2$ нули полинома.

Знак этого полинома зависит от знаков множителей, определяемых его нулями. Отрицательный вещественный нуль всегда дает положительный множитель — двучлен. Пара комплексных сопряженных нулей дает также положительный трехчлен, равный квадрату модуля нуля. Но любой положительный вещественный нуль нечетной кратности будет давать отрицательный множитель. При четной кратности пара одинаковых отрицательных множителей, очевидно, даст положительный множитель. Геометрически при наличии положительного вещественного нуля график $P(x)$ будет пересекать ось x . В случае же нуля четной кратности график будет только касаться оси x и не получит отрицательных ординат.

На основании изложенных соображений приходим к выводу: для неотрицательности вещественной части $Z(j\omega)$ необходимо и достаточно, чтобы ее числитель — полином $P(x)$ не имел положительных корней нечетной кратности. Проверку приведенного условия можно произвести по теореме Штурма. Теорема Штурма позволяет установить число вещественных корней уравнения $P(x) = 0$, заключенных в любом интервале $a \leq x \leq b$ (a и b не совпадают с корнями). Сначала составляется ряд функций:

$$P(x); P'(x); P_1(x) \dots P_m(x) = \text{const},$$

где $P(x)$, $P'(x)$ — заданный полином и его производная; $P_1(x)$ — взятый с обратным знаком остаток от деления P на P' ; $P_2(x)$ — взятый с обратным знаком остаток от деления P' на P_1 и т. д.; P_m — последний остаток.

Далее определяется число n_a перемен знака в ряде чисел

$$P(a); P'(a); P_1(a) \dots P_m$$

и число n_b перемен знака в ряде чисел

$$P(b); P'(b); P_1(b); \dots; P_m.$$

Согласно теореме Штурма, число вещественных корней в интервале $a \leq x \leq b$ равно разности $|n_a - n_b|$.

Рассмотрим пример. Требуется определить наличие положительных вещественных нулей в интервале $0 \leq x \leq \infty$ полинома:

$$1. P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Последующие функции Штурма:

$$2. P'(x) = 3x^2 - 4x - 1;$$

$$3. P_1(x) = \frac{14}{9}x - \frac{16}{9};$$

$$4. P_2(x) = 1.$$

Знаки ряда функций Штурма:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | n |
|------------|---|---|---|---|-----|
| $x=0$ | + | - | - | + | 2; |
| $x=\infty$ | + | + | + | + | 0. |

Число положительных вещественных корней полинома равно двум. В интервале между двумя этими корнями полином будет отрицательным.

При наличии кратных полюсов у $P(x)$ деление с целью получения последующих функций Штурма приводит к нулевому остатку, так что ряд функций обрывается. В этом случае следует выделить общий делитель у полиномов $P(x)$ и $P'(x)$. Этот делитель равен последней перед нулевым остатком функции Штурма. Если делитель соответствует одному корню x_1 кратности ν , то общий наибольший делитель полинома и его производной составит $(x - x_1)^{\nu-1}$. При ν нечетном и $x_1 > 0$, очевидно, условие положительности полинома не выполняется и на этом исследование можно прекратить. При ν — четном или $x_1 < 0$ следует применить теорему Штурма к полиному, оставшемуся после отделения кратных нулей. Теорему Штурма применяют также к общему делителю, если он имеет сложный вид.

Рассмотрим пример. Пусть задан полином третьей степени

$$P(x) = x^3 - x^2 - x - 1.$$

Последующие функции Штурма:

$$P'(x) = 3x^2 - 2x - 1;$$

$$P_1(x) = \frac{8}{3}(x - 1);$$

$$P_3(x) = 0.$$

Последняя перед нулевым остатком функция $P_1(x)$ дает значение общего делителя. Следовательно, корень $x_1 = 1$ является

двукратным корнем $P(x)$. Деление $P(x)$ на $(x-x_1)^2$ дает остаток $x+1$, так что

$$P(x) = (x-1)^2(x+1).$$

Полином не принимает отрицательных значений при $0 \leq x \leq \infty$.

В заключение установим в общем виде условия п. в. ф. для рациональной дроби второго порядка

$$Z(s) = \frac{s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0}.$$

Прежде всего коэффициенты должны быть вещественными. Далее, чтобы нули и полюсы лежали в левой полуплоскости, коэффициенты числителя и знаменателя не должны принимать отрицательных значений.

Вещественная часть при $s=j\omega$

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{\omega^4 + \omega^2(a_1b_1 - a_0 - b_0) + a_0b_0}{(b_0 - \omega^2)^2 + b_1^2\omega^2} = \frac{x^2 + bx + q}{Q(x^2)}. \quad (1.17)$$

Знаменатель здесь положителен. Для установления условий положительности числителя в данном случае нет необходимости прибегать к теореме Штурма. Положительных вещественных нулей числитель не будет иметь, если дискриминант не принимает положительных значений

$$(a_1b_1 - a_0 - b_0) \geq 2\sqrt{a_0b_0}; \quad a_1b_1 \geq (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^2. \quad (1.18)$$

Это неравенство является условием п. в. ф. для дроби второго порядка с положительными коэффициентами.

§ 1.3. Свойства и реализация входных функций реактивных двухполюсников

Функция входного сопротивления двухполюсника, составленного из реактивных (L , C) элементов, будет выражаться согласно (1.10) при $F_0=0$ как

$$Z(s) = sT_0 + V_0/s. \quad (1.19)$$

Приравняв это выражение нулю, получим условие, которому должны удовлетворять нули сопротивления:

$$s = \sqrt{-V_0/T_0} = \pm j\sqrt{V_0/T_0} \quad (1.20)$$

В силу вещественности и положительности V_0 и T_0 при любых значениях комплексной частоты s нули, а также полюсы входного сопротивления и входной проводимости являются парно сопряженными мнимыми величинами, т. е. лежат на мнимой оси симметрично относительно начала координат.

В соответствии с установленным в § 1.2 свойством полюсы $Z(s)$ и $Y(s)$ (следовательно, и нули обеих функций) должны быть простыми с положительными вещественными вычетами.

Обозначим сопряженные нули и полюсы на мнимой оси через $\pm j\omega_k'$ и $\pm j\omega_k$. Пара сопряженных нулей (или полюсов) будет давать множитель

$$(s - j\omega') (s + j\omega') = s^2 + (\omega')^2.$$

Кроме того, может быть один множитель s , соответствующий простому нулю (или полюсу) в начале координат. Числители и знаменатели входных функций реактивной цепи являются произведениями конечного числа множителей указанного вида и могут быть в зависимости от наличия или отсутствия множителя s нечетными или четными полиномами.

При $s = j\omega$ (на мнимой оси) входное сопротивление (или входная проводимость) согласно (1.11)

$$Z(j\omega) = j\omega (T_0 - V_0/\omega^2) = -Z(-j\omega) \quad (1.21)$$

является мнимой и, следовательно, нечетной рациональной дробью. Вещественная часть сопротивления равна нулю.

Если у нечетной рациональной дроби знаменатель четный, то числитель должен быть нечетным, и наоборот. Поэтому сопротивление, представляющее рациональную дробь, можно записать в виде

$$Z(s) = K \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K [s^2 + (\omega_1')^2] [s^2 + (\omega_2')^2] \dots [s^2 + (\omega_m')^2]}{s (s^2 + \omega_1^2) (s^2 + \omega_2^2) \dots (s^2 + \omega_n^2)}. \quad (1.22)$$

Здесь знаменатель записан в виде нечетного полинома степени $2n + 1$ с нулем при $s = 0$, а числитель — в виде четного полинома степени $2m$. Можно было также принять знаменатель четным полиномом, а числитель — нечетным.

Если учесть установленное в § 1.2 свойство вычетов в простых полюсах на мнимой оси, т. е. коэффициентов в разложении функции на простые дроби, то полученных сведений, записанных в виде выражения (1.22), достаточно для реализации входного сопротивления.

Первая реализация получается путем разложения входного сопротивления на сумму простых дробей. Приняв для определенности, что (1.22) имеет полюс в бесконечности, т. е. степень числителя на единицу больше степени знаменателя ($m = n + 1$), имеем

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i s}{s^2 + \omega_i^2}. \quad (1.23)$$

Коэффициенты разложения (вычеты) определяются для выражения $Z(s)/s$, которое имеет для s^2 простые вещественные полюсы $s^2 = -\omega_i^2$, по следующей формуле:

$$k_i = (s^2 + \omega_i^2) Z(s)/s \big|_{s^2 = -\omega_i^2}. \quad (1.24)$$

Каждое слагаемое (1.23) в виде простой дроби с положительными вещественными коэффициентами реализуется простейшими реактивными двухполюсниками.

Первое и второе слагаемые, полученные в результате выделения полюсов в бесконечности и нуле, реализуются соответственно индуктивностью и емкостью:

$$\begin{aligned} k_{\infty}s &= L_{\infty}s; & L_{\infty} &= k_{\infty}; \\ \frac{k_0}{s} &= \frac{1}{C_0s}; & C_0 &= 1/k_0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Слагаемое, соответствующее выделению из $Z(s)$ конечного ненулевого полюса, можно представить как

$$Z_i(s) = \left(\frac{s}{k_i} + \frac{\omega_i^2}{k_i s} \right)^{-1} = (C_i s + 1/L_i s)^{-1}.$$

Такое слагаемое реализуется контуром из параллельно соединенных емкости и индуктивности:

$$C_i = 1/k_i; \quad L_i = k_i/\omega_i^2. \quad (1.26)$$

Суммированию простых дробей $Z_i(s)$ соответствует последовательное соединение реализующих элементов и контуров. Первая реализующая схема, основанная на разложении $Z(s)$ на простые дроби, приведена на рис. 1.4, а.

В частном случае функция (1.22) может не иметь полюса в бесконечности ($Z(s)$ правильная дробь). Тогда реализующая схема не будет содержать последовательной индуктивности L_{∞} . Также $Z(s)$ может не иметь полюса при $s=0$ (имеет здесь нуль); в этом случае не будет последовательной емкости C_0 .

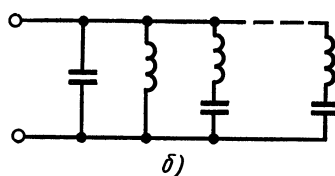
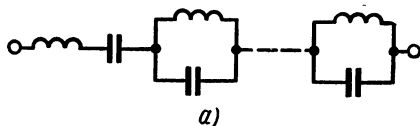


Рис. 1.4

Вторую реализацию можно получить, если разлагать на простые дроби обратную функцию, т. е. проводимость.

Для правильной дроби, обратной (1.22), будем иметь

$$Y(s) = \sum_{i=1}^m \frac{k'_i(s)}{s^2 + (\omega'_i)^2}. \quad (1.27)$$

Положительный вещественный вычет функции $Y(s)/s$ в простом вещественном полюсе $s^2 = -(\omega'_i)^2$ вычисляется по формуле

$$k'_i = [s^2 + (\omega'_i)^2] Y(s)/s \Big|_{s^2 = -\omega'^2_i}. \quad (1.28)$$

Слагаемое (1.27), которое можно представить как

$$Y_i(s) = \left(\frac{s}{k'_i} + \frac{\omega'^2_i}{k'_i s} \right)^{-1} = \left(L'_i s + \frac{1}{C'_i s} \right)^{-1},$$

реализуется контуром из последовательно соединенных индуктивности и емкости:

$$L'_i = 1/k'_i; \quad C'_i = k'_i/(\omega'_i)^2. \quad (1.29)$$

Суммированию простых дробей $Y_i(s)$ соответствует параллельное соединение реализующих последовательных контуров. Вторая реализующая схема, основанная на разложении $Y(s)$ на простые дроби, приведена на рис. 1.4, б. Обе схемы рис. 1.4 называют каноническими схемами Фостера.

В общем случае проводимость может иметь полюс в бесконечности или полюс при $s=0$. Выделение этих полюсов даст в схеме параллельные ветви соответственно из емкости и индуктивности.

Выясним дальнейшие свойства входных функций реактивных двухполюсников. Из анализа выражений (1.24) и (1.29) при учете (1.22) можно убедиться, что положительность вычетов обеспечивается лишь в том случае, когда значения нулей и полюсов на мнимой оси взаимно чередуются. Свойство чередования, являющееся следствием положительности и вещественности вычетов в полюсах на мнимой оси, можно получить также, исследуя поведение $Z(s)$ или $Y(s)$ при $s=j\omega$, т. е. на мнимой оси. Положив в (1.23) $s=j\omega$, имеем

$$Z(j\omega) = jx(\omega) = j \left(k_\infty \omega - \frac{k_0}{\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \right). \quad (1.30)$$

Первая производная от $x(\omega)$ по частоте

$$\frac{dx}{d\omega} = b_\infty + \frac{b_0}{\omega^2} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i (\omega_i^2 + \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2}. \quad (1.31)$$

В этом выражении все слагаемые положительны, так что первая производная от реактивной составляющей на мнимой оси положительна, иначе говоря, наклон кривой $x(\omega)$ положителен всюду, за исключением точек $\omega = \omega_i$, т. е. полюсов. На оси $j\omega$ в окрестности полюса ω_i реактивная составляющая (1.30) будет определяться одним слагаемым

$$x(\omega) \approx \frac{k_i \omega}{\omega_i^2 - \omega^2}.$$

При $\omega < \omega_i$ (слева от полюса) $x(\omega) > 0$; если $\omega \rightarrow \omega_i$, то $x(\omega) \rightarrow +\infty$. При $\omega > \omega_i$ (справа от полюса) $x(\omega) < 0$; если $\omega \rightarrow \omega_i$, то $x \rightarrow -\infty$. В полюсах, следовательно, происходит скачок $x(\omega)$ от $+\infty$ до $-\infty$. На рис. 1.5, а показана кривая зависимости x от частоты. На рис. 1.5, б показана кривая зависимости обратной функции — реактивной составляющей проводимости $b(\omega)$, наклон которой также положителен, что легко показать на основании рассмотрения выражения (1.27) при $s=j\omega$.

Из монотонного нарастания $x(\omega)$ или $b(\omega)$ следует, что между соседними полюсами непременно должен располагаться нуль — реактивная составляющая должна проходить через нулевое значение. Следовательно, нули и полюсы $Z(s)$ и $Y(s)$ чередуются.

Условие взаимного чередования нулей и полюсов можно записать в виде неравенств:

$$0 < \omega'_1 < \omega_1 < \omega'_2 < \omega_2 < \dots < \omega'_m < \omega_n. \quad (1.32)$$

Свойства входных функций реактивных двухполюсников можно сформулировать теперь так: нули и полюсы функции сопротив-

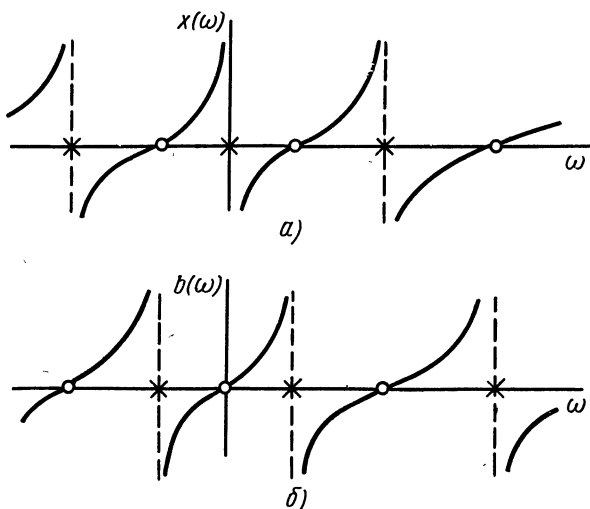


Рис. 1.5

ления (проводимости) являются простыми, лежат только на мнимой оси и взаимно чередуются. Функции, обладающие такими свойствами, называют реактивными.

Продолжим рассмотрение реализации. В приведенных реализациях с помощью разложения рациональной функции на простые дроби выделялись сразу все полюсы сопротивления или проводимости.

Конечно, не обязательно выделять одновременно все полюсы. Реализацию можно начать с выделения из заданной функции лишь одного или нескольких полюсов. Оставшаяся после этого шага функция является также реактансной. Можно выделить снова один или несколько полюсов от функции, обратной остатку. Процесс этот продолжается до выделения всех полюсов. Изменяя порядок и число полюсов, выделяемых при каждом шаге процесса, можно получить множество вариантов реализации.

Рассмотрим реализацию, не требующую определения нулей и полюсов, когда при каждом шаге из функции или обратной ей функции выделяется один полюс в бесконечности. Предварительно

заметим, что реактансная функция при $s = \infty$ имеет либо полюс, либо нуль, в зависимости от того, больше или меньше степень числителя степени знаменателя.

Реализация начинается с выделения полюса в бесконечности из той функции (Z или Y), которая имеет этот полюс, путем деления числителя на знаменатель, начиная от старших степеней. Если полюс $s = \infty$ выделен из $Z(s)$, то он реализуется последовательной индуктивностью, если выделен из $Y(s)$ — параллельной емкостью.

Оставшаяся после выделения полюса в бесконечности функция будет иметь нуль при $s = \infty$: степень ее числителя меньше на единицу степени знаменателя. Обратная остатку функция будет иметь полюс $s = \infty$, который может быть выделен делением знаменателя остатка на числитель. Из функции, обратной новому остатку, снова можно выделить полюс $s = \infty$ и т. д.

Указанный процесс поочередного деления, начиная со старших степеней, числителя функции на знаменатель, знаменателя остатка на числитель и т. д., приводит к разложению в конечную цепную дробь вида

$$Z(s) = K \frac{M(s)}{N(s)} = L_1(s) + \frac{1}{C_2 s +} \frac{1}{L_3 s +} \frac{1}{C_3 s + \dots} \quad (1.33)$$

Этому разложению соответствует третья реализующая схема лестничной (цепной) структуры, показанная на рис. 1.6, а.

Аналогичным образом можно при каждом шаге выделять полюс в нуле: реактансная функция при $s = 0$ непременно имеет либо

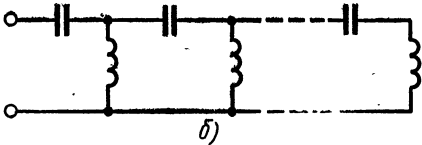
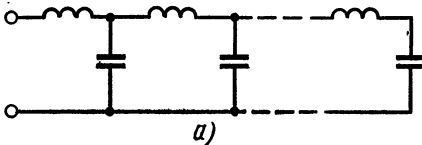


Рис. 1.6

полюс, если нечетен знаменатель, либо нуль, если нечетен числитель. Реализация начинается с выделения полюса в нуле из той функции (Z или Y), которая имеет этот полюс, путем деления числителя на знаменатель, начиная с младших степеней. Оставшаяся после первого шага функция будет иметь при $s = 0$ нуль, а обратная ей функция полюс. Последний снова выделяется делением знаменателя остатка на числитель и т. д.

Указанный процесс поочередного деления, начиная с младших степеней, числителя функции на знаменатель, знаменателя остатка на числитель и т. д., дает разложение в конечную цепную дробь вида

$$Z(s) = K \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{C_1' s +} \frac{1}{L_2' s +} \frac{1}{C_3' s + \dots} \quad (1.34)$$

Для этого разложения получается четвертая реализующая схема также цепной структуры, приведенная на рис. 1.6, б. Обе схемы рис. 1.6 называют каноническими схемами Кауэра.

Приведенные реализующие схемы называют каноническими: они содержат минимально возможное число элементов. Последнее для заданной функции равно числу коэффициентов полиномов или числу нулей и полюсов плюс единица, учитывающая постоянный множитель.

В качестве примера реализуем функцию

$$Z(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s(s^2+3)} = \frac{s^4+5s^2+4}{s^3+3s}$$

Из чередования нулей и полюсов, лежащих на мнимой оси, делаем вывод, что имеем реактансную функцию. На рис. 1.7, а, б показаны распределение нулей и полюсов и частотная зависимость $x(\omega)$ и $b(\omega)$.

Разлагаем $Z(s)/s$ на простые дроби

$$\begin{aligned} \frac{Z(s)}{s} &= \frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s^2(s^2+3)} = \\ &= k_\infty + \frac{k_0}{s^2} + \frac{k_1}{s^2+3}. \end{aligned}$$

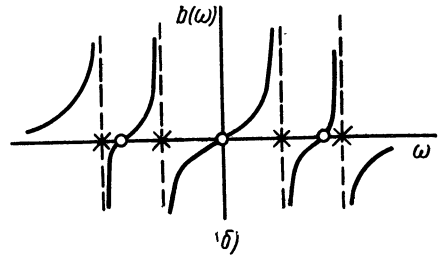
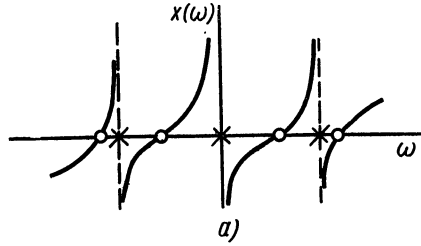


Рис. 1.7

Целая часть $k_\infty = 1$, а остальные вычеты согласно (1.24):

$$\begin{aligned} k_0 &= \left. \frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s^2+3} \right|_{s^2=0} = 4/3; \\ k_1 &= \left. \frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s^2} \right|_{s^2=-3} = 2/3. \end{aligned}$$

Функция сопротивления

$$Z(s) = s + \frac{4/3}{s} + \frac{2s/3}{s^2+3}.$$

Реализующая схема дана на рис. 1.8, а. Аналогичным образом разлагаем $Y'(s)$:

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{s^2+3}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{k'_1}{s^2+1} + \frac{k'_2}{s^2+4}.$$

Вычеты согласно (1.28)

$$k'_1 = 2/3; \quad k'_2 = 1/3.$$

Функция проводимости

$$Y(s) = \frac{2s/3}{s^2+1} + \frac{s/3}{s^2+4}.$$

Реализующая схема показана на рис. 1.8, б.

Перейдем к разложению в цепные дроби. Функция сопротивления имеет полюс в бесконечности; разлагаем ее в цепную дробь делением, начиная со старших степеней

$$\begin{aligned} & \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{s^4 + 3s^2} \Big| \frac{s^3 + 3s}{s +} \\ & \frac{s^3 + 3s}{s^3 + 2s} \Big| \frac{2s^2 + 4}{2s +} \\ & \frac{2s^2 + 4}{2s^2} \Big| \frac{s}{2s +} \\ & \frac{s}{s} \Big| \frac{4}{s/4}. \end{aligned}$$

Получили представление

$$Z(s) = s + \frac{1}{\frac{s}{2} + \frac{1}{2s + \frac{1}{s/4}}}.$$

Реализующая схема изображена на рис. 1. 8, в.

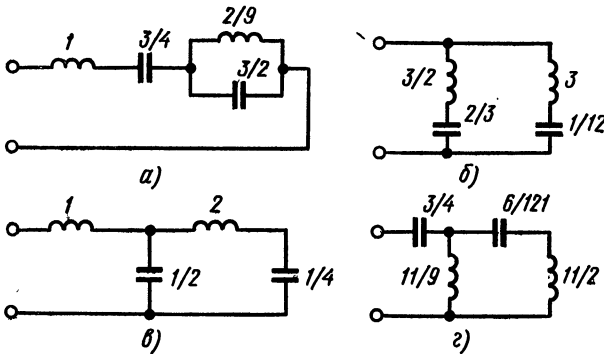


Рис. 1.8

Так как $Z(s)$ имеет полюс при $s=0$, то разлагаем его в цепную дробь делением, начиная с младших степеней

$$\begin{aligned} & \frac{4 + 5s^2 + s^4}{4 + 4s^2/3} \Big| \frac{3s + s^3}{4/3s +} \\ & \frac{3s + s^3}{3s + 9s^3/11} \Big| \frac{11}{9} \frac{s^2 + s^4}{s^2 +} \\ & \frac{11}{3} s^2 + s^4 \Big| \frac{2s^3/11}{121/6s +} \\ & \frac{11}{3} s^2 \Big| \frac{2s^3/11}{2/11s}. \end{aligned}$$

Получили представление

$$Z(s) = \frac{4}{3s} + \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{11s} + \frac{1}{\frac{121}{6s} + \frac{1}{2/11s}}}.$$

Реализующая схема приведена на рис. 1.8, з.

В заключение следует отметить, что необходимые условия: наличие простых взаимно чередующихся нулей и полюсов на мнимой оси, которым должна удовлетворять входная функция LC -цепи, являются также и достаточными — по ним можно построить соответствующую цепь.

§ 1.4. Свойства и реализация входных функций RC -цепей

RC — двухполюсники не содержат индуктивностей, так что $T_0 \equiv 0$ и функция входного сопротивления

$$Z(s) = F_0 + \frac{V_0}{s} = F_0 + \frac{\sigma V_0}{\sigma^2 + \omega^2} - j \frac{\omega V_0}{\sigma^2 + \omega^2}. \quad (1.35)$$

Приравняв нулю (1.35), получаем, что нули $Z(s)$ должны удовлетворять условию:

$$s = -V_0/F_0.$$

Следовательно, нули, а также полюсы входной функции RC цепи должны быть вещественными и отрицательными — они лежат на вещественной отрицательной полуоси, поскольку величины V_0 и F_0 являются вещественными и положительными для любых значений s .

Для выяснения других свойств функции $Z(s)$ рассмотрим ее мнимую часть, которая при $s = \sigma + j\omega$ согласно (1.11) имеет вид

$$x(\sigma, \omega) = -\frac{\omega V_0}{\sigma^2 + \omega^2}. \quad (1.36)$$

Как видно, в верхней полуплоскости ($\omega > 0$) мнимая часть отрицательна ($x < 0$).

Следовательно, при обходе полюса $s = -\sigma_k$ по расположенной в верхней полуплоскости полуокружности малого радиуса ρ (рис 1.9, а), когда угол θ изменяется от нуля до π , мнимая часть $Z(s)$ не должна принимать положительных значений.

Как было показано в § 1.2, при обходе полюса кратности μ по окружности малого радиуса ρ мнимая часть $Z(s)$ изменяется по синусоидальному закону:

$$x = -\frac{|k|}{\rho^\mu} \sin(\mu\theta - \psi). \quad (1.37)$$

Только в случае простых полюсов ($\mu = 1$) с вещественными положительными вычетами ($\psi = 0$) синус еще остается положи-

тельным и x — отрицательным при изменении θ от нуля до π (рис. 1.9, б).

Следовательно, полюсы функции сопротивления должны быть простыми с вещественными положительными вычетами.

Из отрицательности $x(\omega)$ при $\omega > 0$ следует также вывод о том, что функция сопротивления $Z(s)$ не может иметь полюса в бесконечности. Действительно, выделение такого полюса (если бы он имелся) дало бы слагаемое $k_{\infty}s$, мнимая часть которого $k_{\infty}\omega > 0$

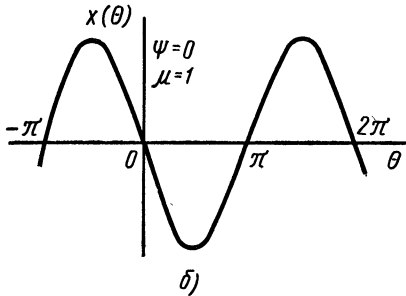
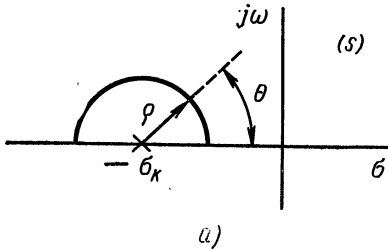


Рис. 1.9

при $\omega > 0$, что противоречит (1.36) по вполне понятной причине — такое слагаемое реализуется индуктивностью.

Следовательно, степень полинома числителя $Z(s)$ может быть равна степени полинома знаменателя $m = n$ или быть на единицу меньше $m = n - 1$. Из приведенных соображений также следует, что $Z(s)$ может иметь полюс при $s = 0$, так как для слагаемого k_0/s , соответствующего этому полюсу, $x = -k_0/\omega$.

Функцию — сопротивления RC цепи можно записать в виде

$$Z(s) = K \frac{(s + \sigma'_1)(s + \sigma'_2) \dots (s + \sigma'_m)}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \dots (s + \sigma_n)} = K \frac{s^m + s^{m-1}a_{m-1} + \dots + sa_1 + a_0}{s^n + s^{n-1}b_{n-1} + \dots + sb_1 + b_0} \quad (1.38)$$

Здесь числитель и знаменатель содержат все степени s от нуля до m и от нуля до n , причем возможны только два случая: $m = n$ и $m = n - 1$, т. е. степень числителя равна или меньше на единицу степени знаменателя.

Разложение (1.38) на простые дроби дает первую реализующую схему

$$Z(s) = k_{\infty} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + \sigma_i} \quad (1.39)$$

Вещественные положительные вычеты вычисляются по формуле

$$k_i = (s + \sigma_i) Z(s) \Big|_{s = -\sigma_i} \quad (1.40)$$

Постоянная составляющая равна значению сопротивления при $s = \infty$ $k_{\infty} = Z(\infty)$. Если $m = n - 1$, то $k_{\infty} = 0$. При $s = 0$ значение сопротивления, как видно из (1.39),

$$Z(0) = k_{\infty} + \sum_{i=1}^n k_i/\sigma_i > Z(\infty) = k_{\infty}$$

Схема (рис. 1.10, *a*) состоит из последовательного соединения сопротивления k_∞ и параллельных RC контуров с проводимостями

$$\frac{s + \sigma_i}{k_i} = \frac{s}{k_i} + \frac{\sigma_i}{k_i} = sC_i + 1/R_i, \quad (1.41)$$

где $C_i = 1/k_i$; $R_i = k_i/\sigma_i$.

Функцию проводимости RC -цепи, которая согласно (1.10)

$$Y(s) = F_0 + V_0^*/s,$$

необходимо рассматривать особо. Ее мнимая составляющая при $s = \sigma - j\omega$ положительна в верхней полуплоскости:

$$b = \frac{\omega V_0}{\sigma^2 + \omega^2} > 0 \quad (\omega > 0). \quad (1.42)$$

Используя это свойство, на основе рассуждений, аналогичных приведенным выше, заключаем, что полюсы $Y(s)$ (нули $Z(s)$) будут простыми с вещественными положительными вычетами.

Далее, очевидно, что $Y(s)$ не может иметь полюсы при $s = 0$, так как мнимая часть соответствующего слагаемого $b = -k'_0/\omega$ отрицательна в верхней полуплоскости — такое слагаемое реализуется индуктивностью.

Так как функции проводимости и сопротивления взаимно обратны, то степень числителя $Y(s)$ должна быть равна степени знаменателя или быть на единицу больше: проводимость может иметь полюс в бесконечности.

Если разлагать на простые дроби непосредственно $Y(s)$, то получим дроби вида $k'_i/s + \sigma_i$, мнимая часть которых $(-\omega k'_i)/(\sigma + \sigma_i)^2 + \omega^2) < 0$ при $\omega > 0$ не удовлетворяет (1.42). Это вполне понятно — такую проводимость имеет параллельный RL -контур.

Легко убедиться, что условию (1.42) удовлетворяет дробь вида

$$Y_i = \frac{k'_i s}{s + \sigma_i}, \quad (1.43)$$

которая реализуется последовательным RC -контуром. Ее мнимая часть при $s = \sigma + j\omega$ удовлетворяет условию (1.42):

$$b = \frac{k_i \sigma'_i}{(\sigma + \sigma'_i)^2 + \omega^2} > 0 \quad (\omega > 0).$$

Чтобы получить дробь (1.43), необходимо разлагать на простые дроби не $Y(s)$, а функцию $Y(s)/s$, степень числителя которой равна или меньше на единицу степени знаменателя. Разложение

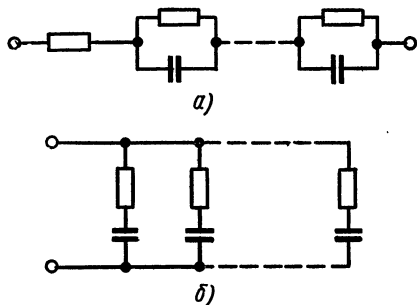


Рис. 1.10

будет иметь такой же вид, как и (1.39). Умножив обе части разложения на s , получим

$$Y(s) = k'_\infty s + k'_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k'_i s}{s + \sigma'_i}. \quad (1.44)$$

Вычеты здесь определяются из выражения

$$k_i = (s + \sigma'_i) Y(s)/s \Big|_{s = -\sigma'_i}. \quad (1.45)$$

Постоянная составляющая равна значению проводимости при $s=0$, которая всегда меньше значения при $s=\infty$:

$$Y(0) = k'_0 < Y(\infty).$$

Вторая схема, реализующая функцию проводимости, показана на рис. 1.10, б. Она состоит из параллельного соединения последовательных RC -контуров с сопротивлениями:

$$C_i = 1/k'_i; \quad R_i = \sigma'_i/k'_i. \quad (1.46)$$

Из рассмотрения выражений (1.40) и (1.45) можно убедиться, что положительность вещественных вычетов обеспечивается только при взаимном чередовании простых нулей и полюсов. Свойство чередования можно получить также, исследуя поведения функций (1.39) и (1.44) при $s=\sigma$, т. е. на вещественной оси:

$$Z(\sigma) = k_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\sigma + \sigma_i};$$

$$Y(\sigma) = k'_\infty \sigma + \sum_{i=1}^n \frac{k'_i \sigma}{\sigma + \sigma'_i}.$$

Первая производная по σ от $Z(\sigma)$ получается отрицательной, а от $Y(\sigma)$ — положительной:

$$\frac{d}{d\sigma} Z(\sigma) = \sum_{i=1}^n \frac{-k_i}{(\sigma + \sigma_i)^2} < 0;$$

$$\frac{d}{d\sigma} Y(\sigma) = k'_\infty + \sum_{i=1}^n \frac{k'_i \sigma_i}{(\sigma + \sigma'_i)^2} > 0.$$

Следовательно, наклон функции $Z(\sigma)$ будет отрицательным, а наклон функции $Y(\sigma)$ — положительным всюду, за исключением полюса, где функции претерпевают бесконечные скачки.

Из отрицательности наклона кривой $Z(\sigma)$ или положительности наклона $Y(\sigma)$ следует, что нули и полюса $Z(s)$, которые лежат на вещественной отрицательной полуоси, должны взаимно чередоваться.

Типичные кривые функций $Z(\sigma)$ и $Y(\sigma)$ будут иметь вид, показанный на рис. 1.11, а, б. Из хода кривой $Z(\sigma)$ наглядно

видно, что ближайшей к началу координат особой точкой должен быть полюс, который в частном случае может быть в начале ($\sigma_i=0$). Из монотонного убывания $Z(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$, начиная от крайнего правого полюса, следует $Z(0) > Z(\infty)$.

Из хода кривой $Y(\sigma)$ также наглядно видно, что ближайшей к началу координат точкой должен быть нуль, который может находиться в начале ($\sigma'_i=0$). Из монотонного роста $Y(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$, начиная от крайнего справа нуля, следует, что $Y(0) < Y(\infty)$. Установ-

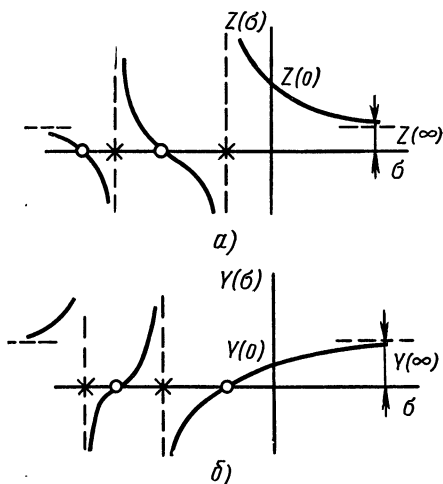


Рис. 1.11

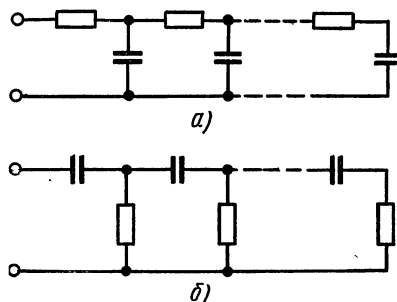


Рис. 1.12

ленное взаимное чередование нулей и полюсов $Z(s)$ можно записать следующим образом:

$$\sigma_1 < \sigma'_1 < \sigma_2 < \sigma'_2 < \dots < \sigma_n < \sigma'_n. \quad (1.47)$$

Нет необходимости во всех случаях одновременно выделять, как в приведенных реализациях, все полюса $Z(s)$ или $Y(s)$. Можно, так же как и в случае реактивной цепи, получить множество реализаций, выделяя вначале один или несколько полюсов $Z(s)$, а затем — полюс функции, обратной остатку, представляющему также функцию RC-цепи, и т. д.

Рассмотрим реализацию разложением в цепные дроби. Процесс разложения здесь имеет некоторые особенности.

Деление, начиная со старших степеней, применяется к выражению $Z(s)$, имеющему одинаковые степени числителя и знаменателя. Первый шаг — деление числителя на знаменатель — выделяет постоянную величину $Z(\infty)$, реализуемую последовательным сопротивлением (рис. 1.12, а). Первый остаток будет иметь нуль при $s = \infty$; величина, обратная остатку, имеет здесь полюс, который выделяется делением знаменателя остатка на числитель и реализуется параллельной емкостью. Величина, обратная остатку, имеет те же свойства, что и исходная функция. Поэтому из нее снова выделяется целая часть, реализуемая последовательным сопротив-

лением, и т. д. Цепная дробь получит вид -

$$Z(s) = \frac{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0} = R_1 + \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{sC_4 + \dots}}} \quad (1.48)$$

Если степень числителя $Z(s)$ меньше степени знаменателя, то необходимо начинать с обратной величины, т. е. $Y(s)$, которая и разлагается в цепную дробь. Реализующая схема будет отличаться от полученной (рис. 1.12, а) лишь отсутствием последовательного сопротивления R_1 .

Деление, начиная с младших степеней, применяется к выражению $Y(s)$ с одинаковыми степенями числителя и знаменателя. Первый шаг — деление числителя на знаменатель — выделяет постоянную величину $Y(\infty)$, реализуемую параллельной проводимостью G_1 (рис. 1.12, б). Величина, обратная остатку, имеет полюс при $s = \infty$, выделение которого делением знаменателя остатка на числитель дает последовательную емкость. Функция, обратная второму остатку, имеет те же свойства, что и исходная, так что далее нужно повторять первые два шага до полного деления. Цепная дробь получит вид

$$Y(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} = G_1 + \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{G_3 + \frac{1}{\frac{1}{sC_4} + \dots}}} \quad (1.49)$$

Если степень числителя $Y(s)$ меньше степени знаменателя, то необходимо начинать деление с младших степеней обратной функции. В реализующей схеме (рис. 1.12, б) не будет первой параллельной проводимости G_1 .

В качестве примера реализуем функцию сопротивления

$$Z(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}.$$

Простые нули и полюса лежат на отрицательной вещественной полуоси и чередуются; ближайшей к началу точкой является полюс.

Вычеты $Z(s)$ в полюсах $s = -1$ и $s = -3$ согласно (1.40) равны:

$$k_1 = \left. \frac{(s+2)(s+4)}{s+2} \right|_{s=-1} = 3;$$

$$k_2 = \left. \frac{(s+2)(s+4)}{s+1} \right|_{s=-3} = \frac{1}{2}.$$

Разложение сопротивления на простые дроби после выделения целой части получит вид

$$Z(s) = 1 + \frac{3}{s+1} + \frac{0,5}{s+3}.$$

Соответствующая реализующая схема изображена на рис. 1.13, а.

Вычеты $(Y(s)/s) = (s+1)(s+3)/s(s+2)(s+4)$ в полюсах $s=0$, $s=-2$ и $s=-4$ согласно (1.45) равны:

$$k'_0 = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)} \Big|_{s=0} = 3/8;$$

$$k'_1 = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+4)} \Big|_{s=-2} = 1/4;$$

$$k'_2 = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)} \Big|_{s=-4} = 3/8.$$

Разложение проводимости имеет вид

$$Y(s) = \frac{3}{8} + \frac{s/4}{s+2} + \frac{3s/8}{s+4}.$$

Реализующая схема дана на рис. 1.13, б.

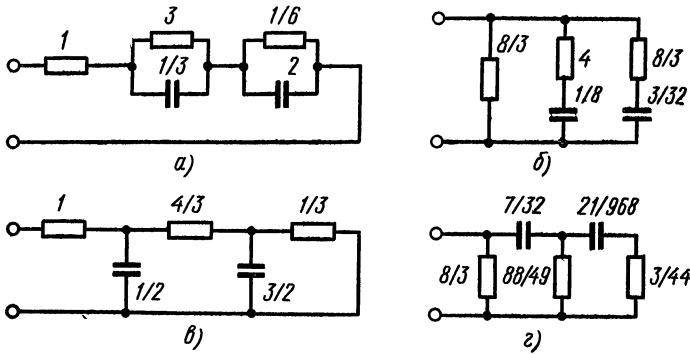


Рис. 1.13

Поскольку степени числителя и знаменателя равны, то разложение в цепную дробь делением со старших степеней начинаем с функции $Z(s)$:

$$\begin{array}{r} s^2 + 6s + 8 \Big| s^2 + 4s + 3 \\ \underline{s^2 + 4s + 3} \\ 2s + 5 \\ s^2 + 2,5s \\ \underline{s^2 + 2,5s} \\ 2s + 5 \Big| 1,5s + 3 \\ \underline{2s + 4} \\ 1,5s + 3 \\ 1,5s \\ \underline{1,5s} \\ 1 \Big| 3 \\ \underline{1} \\ 1 \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$$

Цепная дробь имеет вид

$$Z(s) = 1 + \frac{1}{0,5s + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{1,5s + \frac{1}{3}}}}$$

Реализующая схема показана на рис.1.13, в.

Разложение в цепную дробь делением с младших степеней начинаем с функции $Y(s)$

$$\begin{array}{r}
 3 + 4s + s^2 \left| \frac{8 + 6s + s^2}{8} + \right. \\
 3 + \frac{9}{4}s + \frac{3}{8}s^2 \\
 8 + 6s + s^2 \left| \frac{7}{4}s + \frac{5}{8}s^2 \right. \\
 8 + \frac{20}{7}s \left| \frac{32}{7s} + \right. \\
 \frac{7}{4}s + \frac{5}{8}s^2 \left| \frac{22}{7}s + s^2 \right. \\
 \frac{7}{4}s + \frac{49}{88}s^2 \left| \frac{49}{88} + \right. \\
 \frac{22}{7}s + s^2 \left| \frac{3}{44}s^2 \right. \\
 \frac{22}{7}s \left| \frac{22 \cdot 44}{21s} + \right. \\
 \frac{3}{44}s^2 \left| \frac{s^2}{44/3} \right.
 \end{array}$$

Цепная дробь имеет вид

$$Y(s) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\frac{32}{7s} + \frac{49}{88} + \frac{1}{\frac{22 \cdot 44}{21s} + \frac{1}{44/3}}}.$$

Реализующая схема дана на рис. 1.13, е.

§ 1.5. Свойства и реализация входных функций RL -двухполюсников

Свойства, а также реализующие схемы входных функций RL -двухполюсников являются дуальными свойствами и схемам входных функций RC -двухполюсников. Свойства сопротивления RC -цепи на дуальной основе можно перенести на свойства проводимости RL -цепи, а свойства проводимости RL -цепи — на свойства сопротивления RL -цепи.

В силу имеющейся дуальной аналогии ограничимся кратким перечислением свойств и реализации входных функций RL -цепей.

Начнем с рассмотрения проводимости RL -цепи, чтобы на дуальной основе следовать порядку изложения предыдущего параграфа.

Входная проводимость цепи, не содержащей емкости ($V_0 = 0$), согласно (1.10)

$$Y(s) = sT_0 + F_0 = \sigma T_0 + F_0 - j\omega T_0. \quad (1.50)$$

Приравняв это выражение нулю, получим условие, которому должны удовлетворять нули проводимости:

$$s^* = -\frac{F_0}{T_0}.$$

Так как F_0 и T_0 вещественны и положительны, то нули, а также полюса входной функции RL -цепи являются вещественными отрицательными, т. е. лежат на вещественной отрицательной полуоси.

В верхней полуплоскости ($\omega > 0$) мнимая часть проводимости RL -цепи согласно (1.50) отрицательна. Для обеспечения этого условия при обходе полюса на оси $-\sigma$ по полуокружности малого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости ($0 \leq \theta \leq \pi$), в соответствии с (1.37) полюса должны быть простыми, с вещественными положительными вычетами.

Следовательно, функция проводимости имеет только простые полюса (а также нули), расположенные на вещественной отрицательной полуоси, с вещественными положительными вычетами; степень числителя может быть равна ($m=n$) или на единицу меньше $m=(n-1)$ степени знаменателя, так что не должно быть полюса в бесконечности, выделение которого дало бы емкость. При $m=n-1$ проводимость имеет полюс при $s=\infty$.

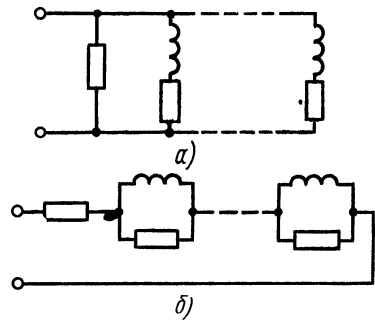


Рис. 1.14

Выражение проводимости и разложение его на простые дроби имеют соответственно вид, аналогичный (1.38) и (1.39).

Реализующая цепь, дуальная цепи рис. 1.10, а, состоит из параллельного соединения последовательных RL -контуров (рис. 1.14, а) и постоянной проводимости, равной значению проводимости при $s=\infty$.

Значения элементов, дуальные (1.41):

$$G = k_\infty; \quad L_i = 1/k_i; \quad G_i = k_i/\sigma_i, \quad (1.51)$$

где k_i — вычеты в полюсах σ_i , которые определяются по формуле, дуальной (1.40).

Функция сопротивления RL цепи согласно (1.10) при $V_0=0$

$$Z(s) = sT_0 + F_0 = \sigma T_0 + F_0 + j\omega T_0. \quad (1.52)$$

Ее мнимая часть положительна в верхней полуплоскости ($\omega > 0$). Это условие выполняется при наличии у $Z(s)$ только простых полюсов с вещественными положительными вычетами, как легко убедиться из выражения мнимой части (1.37).

Так как сопротивление обратно проводимости, то степень его числителя равна или больше на единицу степени знаменателя — сопротивление может иметь полюс в бесконечности, выделение которого дает индуктивность. Но полюса при $s=0$ не должно быть — выделение его дало бы емкость.

Непосредственное разложение $Z(s)$ на простые дроби приведет к RC -цепи. Необходимо разлагать функцию $Z(s)/s$, степень числителя которой равна или на единицу меньше степени знаменателя, Умножение обеих частей разложения на s даст представление $Z(s)$, аналогичное (1.44). Соответствующая реализующая схема, дуальная схеме рис. 1.10, б, состоит из последовательного соеди-

нения активного сопротивления, равного $Z(0)$, и параллельных RL -контуров (рис. 1.14, б) со значениями элементов

$$L'_i = 1/k'_i; \quad R'_i = \sigma'_i/k_i. \quad (1.53)$$

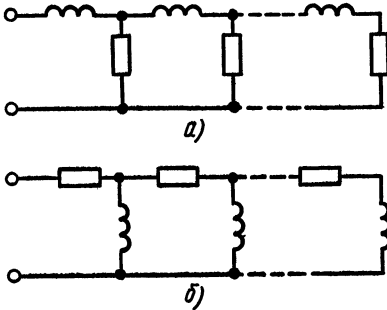


Рис. 1.15

Рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем параграфе, можно показать, что наклон кривых функций $V(\sigma)$ и $Z(\sigma)$ будет соответственно отрицательным и положительным. Отсюда следует вывод о том, что нули и полюса

сопротивления и проводимости лежат на вещественной отрицательной полуоси и взаимно чередуются.

Кривая $Y(\sigma)$ будет иметь одинаковый вид с кривой $Z_{RC}(\sigma)$, представленной на рис. 1.11, а: из кривой видно, что ближайшей к началу особой точкой является полюс, который в частном случае может оказаться в начале координат.

Из графика $Z(\sigma)$, аналогичного графику $Y_{RC}(\sigma)$, приведенному на рис. 1.11, б, видно, что ближайшей к началу координат особой точкой является нуль.

Реализации с помощью разложения в цепные дроби можно получить следующим образом.

Последовательное деление, начиная со старших степеней, применяется к выражению $Y(s)$, имеющему одинаковые степени числителя и знаменателя, и к выражению $Z(s)$, степень числителя которого больше степени знаменателя. Реализующая схема приведена на рис. 1.15, а; во втором случае будет отсутствовать последовательное сопротивление.

Поочередное деление, начиная с младших степеней, применяется к выражению $Z(s)$ с одинаковыми степенями числителя и знаменателя и к выражению $Y(s)$, степень числителя которого больше степени знаменателя.

Реализующая схема показана на рис. 1.15, б.

§ 1.6. О реализации входных функций RLC-двухполюсников

При переходе к функциям входного сопротивления и входной проводимости пассивных цепей общего вида с тремя видами элементов проблема реализации без применения идеальных трансформаторов резко усложняется. Рассмотренные применительно к цепям с двумя видами элементов приемы, основанные на выделении отдельных полюсов путем вычитания соответствующих простых дробей, в случае п. в. ф. с комплексными нулями и полюсами неприменимы, так как вещественность и положительность вычетов не гарантируется.

Рассмотрим кратко идею одного общего метода (Бруне) реализации п. в. ф., использующего взаимную индукцию с идеальной связью ($k_{св} = 1$). Метод Бруне состоит из следующих шагов, последовательно снижающих порядок п. в. ф.:

1. Выделяются все полюса заданной функции $Z(s)$ и обратной ей функции $Y(s)$, расположенные на мнимой оси. Вычеты п. в. ф. в полюсах на мнимой оси, как было показано, вещественны и положительны, и поэтому выделенные полюса реализуются в виде ветвей из параллельных или последовательных LC-контуров (рис. 1.16, а).

Указанная операция должна применяться в первую очередь на любой стадии реализации, как только появятся нули или полюса на мнимой оси.

2. Из оставшейся функции $Z_1(s)$, не имеющей нулей и полюсов на мнимой оси, вычитается постоянная величина, равная минимальному значению вещественной части функции $R_1 = \text{Re}[Z_1(j\omega)]_{\min}$ и реализуемая резистивным элементом R_1 . Если этот минимум имеет место при $\omega = 0$ или $\omega = \infty$, то выделение R_1 даст нуль функции соответственно в нуле или в бесконечности, который может быть выделен из обратной функции $1/Z_2$, где $Z_2(s) = Z_1(s) - R_1$.

Если минимум R_1 имеет место на конечной ненулевой частоте $j\omega_1$, то оставшаяся после его выделения функция будет иметь чисто мнимое значение $Z_2(s) = \pm jx$.

3. В последнем общем случае из $Z_2(s)$ выделяется полностью мнимое значение $\pm jx = j\omega_1 L_1$, которое реализуется индуктивностью $\pm L_1 = \pm x/\omega_1$; знак индуктивности может быть как положительным, так и отрицательным. Оставшаяся после данного шага функция $Z_3 = Z_2 - (\pm sL_1)$ будет иметь нуль при $s = \pm j\omega_1$ и полюс в бесконечности.

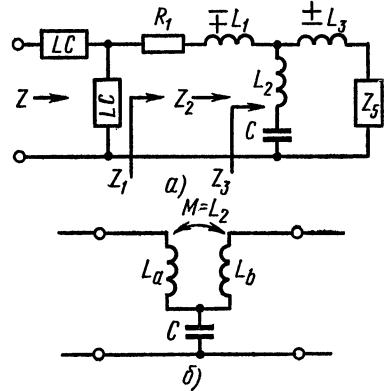


Рис. 1.16

4. Из функции обратной Z_3 выделяется конечный полюс $s^2 = -\omega_1^2$, реализуемый параллельной ветвью из последовательного контура LC (рис. 1.16. а).

5. Остающаяся после этого шага функция $Y_4 = Y_3 - ks/s^2 + \omega_1^2$ будет иметь нуль в бесконечности. Выделение соответствующего этому нулю полюса из обратной функции дает последовательную ветвь из индуктивности $\mp L_3$. Остаток $Z_5 = Z_4 - (\mp sL_3)$ будет иметь порядок, на два меньший порядка функции Z_2 .

На этом завершается основной цикл реализации, включающий пп. 3, 4, 5. К остающейся после него функции более низкого порядка можно снова применить перечисленные процедуры до полной реализации.

Характерная особенность основного цикла состоит в том, что она приводит к Т-образной структуре из трех индуктивностей $\pm L_1$, L_2 и $\mp L_3$, из которых одна всегда отрицательна.

Для иллюстрации указанных моментов реализуем, начиная с п. 2, функцию второго порядка:

$$Z_1(s) = \frac{s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0} = \frac{s^2 + s + 2}{s^2 + 0,5s + 1}.$$

При $s = j\omega$ вещественная и мнимая части

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_1(j\omega) &= \frac{(a_0 - \omega^2)(b_0 - \omega^2) + a_1b_1\omega^2}{(b_0 - \omega^2)^2 + b_1^2\omega^2}; \\ \operatorname{Im} Z_1(j\omega) &= \frac{-\omega [b_1(a_0 - \omega^2) - a_1(b_0 - \omega^2)]}{(b_0 - \omega^2)^2 + b_1^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Вещественная часть принимает минимальное значение $R_1 = 2/3$ при $\omega_1 = \sqrt{2}$.

Выделив R_1 , имеем

$$Z_2 = Z_1 - R_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{s^2 + 2s + 4}{s^2 + 0,5s + 1}.$$

При $\omega = \omega_1 = \sqrt{2}$ $\operatorname{Re} Z_2(j\omega_1) = 0$ и $\operatorname{Im} Z_2(j\omega_1) = x = -2\sqrt{2}/3$. Выделив эту мнимую часть, реализуемую отрицательной индуктивностью $L_1 = -2/3$, получим функцию с нулем при $s^2 = -2$ и полюсом в бесконечности

$$Z_3 = Z_2 - (-s2/3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{s^3 + s^2 + 2s + 2}{s^2 + 0,5s + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(s^2 + 2)(s + 1)}{s^2 + 0,5s + 1}.$$

Выделение индуктивности, как видим, повышает порядок числителя функции на единицу — функция имеет полюс в бесконечности. В рассматриваемом случае вычитания отрицательной индуктивности, равносильного суммированию, вычет в полюсе $s = \infty$, т. е. коэффициент при старшем члене числителя, получается положительным и выделяемая далее индуктивность L_3 — положительной.

Если мнимая часть $Z_2(j\omega_1)$ была бы положительной и пришлось бы вычитать положительную индуктивность, то вычет в полюсе $s = \infty$ оказался бы отрицательным и выделяемая позже индуктивность $L_3 =$ отрицательной.

Разложим функцию, обратную Z_3 , на простые дроби

$$Y_3 = \frac{3s/4}{s^2 + 2} + \frac{3/4}{s + 1}.$$

Первая дробь, соответствующая полюсу $s^2 = -2$, реализуется параллельной ветвью из последовательного резонансного контура с $L_2 = 4/3$ и $C = 3/8$.

Вторая дробь, т. е. остаток после выделения полюса на мнимой оси, имеет нуль в бесконечности.

Выделение полюса в бесконечности из обратной функции дает третью индуктивность $L_3 = 4/3$ с положительным знаком. Остаток в виде постоянной величины реализуется активным сопротивлением $R_5 = 4/3$.

Получающуюся после каждого основного цикла T структуру из индуктивностей $\mp L_1$, L_2 и $\mp L_3$ можно рассматривать как схему замещения индуктивно-связанных катушек с индуктивностями $L_a = L_1 + M = L_1 + L_2$ и $L_b = L_3 + M = L_3 + L_2$ и таким путем осуществить физически. При этом магнитная связь между катушками должна быть совершенной, когда квадрат коэффициента связан

$$k_{св}^2 = \frac{M^2}{L_a L_b} = \frac{L_2^2}{(L_1 + L_2)(L_3 + L_2)} = 1 - \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3}{(L_1 + L_2)(L_3 + L_2)} = 1.$$

Отсюда следует соотношение для двух катушек с совершенной связью:

$$L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 = 0.$$

Можно показать, что этому условию всегда удовлетворяют получаемые в процессе реализации три индуктивности, так что они могут быть осуществлены с помощью двух индуктивно-связанных катушек с $k_{св} = 1$ (рис. 1.16, б). Для приведенного примера имеем:

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = 0; \quad L_a = 2/3; \quad L_b = 8/3.$$

Наличие взаимных индуктивностей с совершенной связью невыполнимой практически, является существенным недостатком рассмотренного метода реализации.

Задачи

1. Для трехконтурной цепи, изображенной на рис. 1.17, записать выражения энергетических функций.

2. Заданы следующие дроби:

$$\frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}; \quad \frac{(s+1)^2}{s^4 + 2s^2 + 4s};$$

$$\frac{2s}{(s+1)(s^2 + s + 1)}; \quad \frac{s^2}{s^2 + 2}.$$

Указать по виду выражений, являются ли функции п. в. ф.

3. Заданы дроби:

$$\frac{(s+2)}{(s+1)(s^2 + 4s + 1)};$$

$$\frac{s^2 + s + 8}{s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 16s + 9}.$$

Проверить, являются ли дроби функциями входных сопротивлений цепи

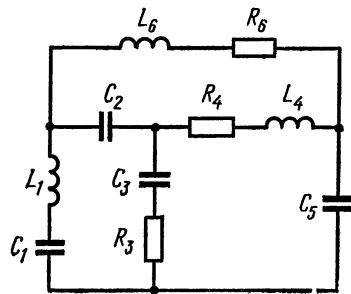


Рис. 1.17

4. Задана дробь с нулями: $s'_{1,2} = \pm j$; $s_{3,4} = \pm j3$ и полюсами $s_1 = 0$; $s_{2,3} = \pm j1,5$:

- 1) построить качественно частотные характеристики;
 - 2) обосновать, является ли дробь входной функцией цепи;
 - 3) найти основные канонические реализующие схемы.
5. Задана дробь следующего вида:

$$F(s) = \frac{s(s^2 + 9)}{(s^2 + 4)(s^2 + 16)}.$$

- 1) показать, является ли дробь входной функцией цепи;
- 2) построить качественно частотные характеристики;
- 3) найти основные реализующие схемы.

6. Задана реактансная двухполюсная цепь, состоящая из параллельного соединения двух LC -контуров: последовательного и параллельного. Значения (нормированные) всех элементов равны единице. Найти эквивалентные цепи.

7. Задана рациональная дробь с нулями: $s'_1 = -0,5$; $s'_2 = -2$ и полюсами: $s_1 = -1$; $s_2 = -4$.

Требуется:

1) построить характеристику $F(\sigma)$, где σ — вещественная часть комплексной частоты;

2) определить вид входной функции (сопротивление или проводимость) и класс цепи;

3) найти основные канонические реализации.

8. Задана дробно-рациональная функция следующего вида:

$$F(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}.$$

1) определить, какой входной функцией и какого вида цепи является функция;

2) построить зависимость $F(\sigma)$;

3) получить основные реализующие схемы.

9. Задана цепь лестничной структуры из трех звеньев. Элементами (тремя) продольных ветвей являются емкости, величины которых одинаковы и равны единице, а элементами поперечных ветвей (трех) являются резисторы с единичными сопротивлениями. Требуется найти эквивалентные цепи.

Глава II

Свойства параметров и реализация функций передачи пассивных четырехполюсников

§ 2.1. Общие замечания

Для реализации четырехполюсников, так же как и рассмотренных двухполюсников, необходимо сначала выявить с наибольшей полнотой свойства всех параметров цепи.

В синтезе четырехполюсников рассматривают взаимно дуальные параметры сопротивлений холостого хода и проводимостей короткого замыкания:

$$\mathbf{z} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

В силу дуальности обоих видов параметров достаточно, очевидно, рассмотреть свойства одного из них, например, системы z -параметров.

По известным свойствам параметров (2.1) можно установить свойства функций передачи нагруженного четырехполюсника. Поэтому данная глава начинается с установления свойств трех параметров z_{ik} (z_{11} , z_{22} и $z_{12} = z_{21}$) или y_{ik} (y_{11} , y_{22} и $y_{12} = y_{21}$).

Поскольку методы синтеза служат для проектирования используемых на практике цепей, то при рассмотрении свойств параметров и их реализации следует уделять основное внимание тем видам и конфигурациям цепей, которые приемлемы с практической точки зрения. К наиболее существенным требованиям, обычно предъявляемым к цепям, можно отнести следующие:

1. Цепи не должны иметь взаимных индуктивностей, особенно с совершенной связью ($k_{св} = 1$) или в виде идеальных трансформаторов.

2. Число элементов цепи должно быть по возможности минимальным. Так же как и в случае двухполюсных цепей, реализация четырехполюсников с тремя видами элементов существенно усложняется и требует значительно большего числа элементов по сравнению с минимально возможным, определяемым порядком дробно-рациональных параметров. Цепи с двумя видами элементов LC (или RC), реализуемые с меньшим числом элементов, представляют также интерес по другим соображениям — малых потерь энергии и затухания в LC -цепях, отсутствия в RC -цепи индуктивного элемента, нежелательного в случае очень низких частот или изготовления схемы по интегральной технологии и т. п.

3. Часто требуется иметь неуравновешенный четырехполюсник, т. е. трехполюсник, допускающий заземление общего вывода для входа и выхода. С этой точки зрения большой интерес представляют цепи цепочечной или лестничной структуры, широко используемые на практике.

Лестничная цепь обладает относительно невысокой чувствительностью ее параметров и характеристик к изменению значений элементов. Это очень важное достоинство, так как на практике реальные элементы изготавливаются с определенными допусками или их величины могут со временем меняться. При этом не должны заметно изменяться характеристики цепи.

Полная реализация четырехполюсника должна производиться по заданным трем элементам матрицы сопротивлений (проводимостей), удовлетворяющих условиям физической реализуемости. Решение подобной задачи реализации затруднительно, если необходимо иметь цепи без индуктивных связей (идеальных трансформаторов).

Более простой является задача реализации заданной функции передачи, сводящаяся к построению цепи по двум элементам матрицы сопротивлений или проводимостей. Большинство практических задач синтеза четырехполюсника можно решать с помощью реализации двух его параметров.

Существующие в настоящее время методы реализации функций передачи приводят к четырехполюсникам определенной конфигурации, таких как:

1. Трехполюсник лестничной структуры, являющийся, как указывалось, весьма желательным видом цепи. Недостаток ее — возможность реализации только функций минимальной фазы.

2. Трехполюсник в виде параллельных лестничных структур, который позволяет реализовать функции передачи более общего вида и тем самым устранить недостаток предыдущей цепи.

3. Четырехполюсник разветвленной структуры общего вида.

4. Симметричный четырехполюсник мостовой (скрещенной) структуры постоянного входного сопротивления. Основное достоинство этой структуры — общность ее, позволяющая реализовать функцию передачи любого вида, включая функцию неминимальной фазы.

Но мостовая структура является уравновешенной, так что нельзя иметь общую для входа и выхода заземляемую точку. Кроме того, общее число элементов цепи получается чрезмерно большим. Эти недостатки можно частично устранить преобразованием мостовой структуры в неуравновешенную. К сожалению, такое преобразование не всегда осуществимо. Чувствительность мостовой схемы к изменению параметров выше, чем у лестничной структуры.

В этой главе основное внимание уделяется выявлению свойств и реализации трехполюсника первого вида — лестничной структуры с двумя видами элементов: LC - и RC -трехполюсников, наиболее часто применяемых на практике. Для полноты также изложен кратко принцип мостовой реализации.

§ 2.2. Свойства параметров пассивных четырехполюсников

Параметры четырехполюсника z_{ik} (y_{ik}) являются входными и передаточными сопротивлениями при разрыве (проводимостей при коротком замыкании) выводов и для рассматриваемых цепей с сосредоточенными элементами выражаются в виде рациональных дробей от комплексной частоты s .

Полюса z_{ik} (y_{ik}), которые представляют частоты собственных колебаний четырехполюсной цепи в режиме разрыва (короткого замыкания) выводов входа и выхода, в общем случае должны быть одинаковыми.

Но если в частном случае вход и выход четырехполюсника имеют последовательно соединенные ветви с сопротивлениями Z_1 и Z_2 (рис. 2.1, а), то полюса Z_1 войдут только в z_{11} , а полюса Z_2 только в z_{22} , так что z_{11} и z_{22} будут иметь избыточные полюса, не содержащиеся в $z_{12} = z_{21}$. Это следует из того, что в режимах разрыва входа и выхода, при которых определяются параметры, ветви с сопротивлениями Z_1 и Z_2 отключаются из схемы четырехполюсника.

Аналогично, если вход и выход четырехполюсника имеют параллельно соединенные ветви (рис. 2.1, б), то полюса их проводимостей войдут соответственно только в y_{11} и y_{22} и не войдут в $y_{12} = y_{21}$: в режимах короткого замыкания входа и выхода, при которых определяются параметры, ветви с проводимостями Y_1 и Y_2 отключаются от схемы.

Свойства параметров z_{11} и z_{22} (y_{11} и y_{22}), имеющих смысл входных сопротивлений (проводимостей), уже установлены: они являются п. в. ф., регулярными в правой полуплоскости и имеющими положительную вещественную часть на мнимой оси.

В случае реактивных цепей нули и полюса должны быть простыми, лежать на мнимой оси и взаимно чередоваться. В случае RC - и RL -цепей нули и полюса, также простые, лежат на вещественной отрицательной полуоси и взаимно чередуются.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы выяснить свойства передаточного сопротивления $z_{12} = z_{21}$ (передаточной проводимости $y_{12} = y_{21}$).

Свойства параметра передачи можно получить из рассмотрения квадратичной формы (1.9) параметров, представляющей п. в. ф., которую приводим здесь снова:

$$Z(s) = z_{11}x_1^2 + 2z_{21}x_1x_2 + z_{22}x_2^2. \quad (2.2)$$

Поскольку любой полюс z_{ik} является полюсом $Z(s)$, то все полюса z_{12} должны лежать в левой полуплоскости. Полюса z_{12}

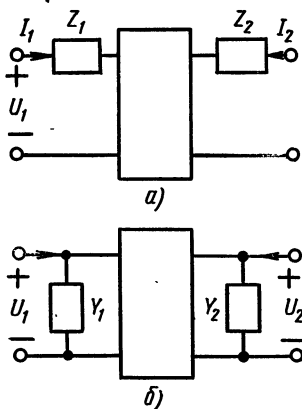


Рис. 2.1

на мнимой оси, так же как и полюса $Z(s)$, должны быть простыми.

Выясним, какой вид имеет вычет z_{12} в полюсе на мнимой оси. Выделим из $Z(s)$ и z_{ik} их общий полюс на мнимой оси $s^2 = -\omega_i^2$. При $s^2 \rightarrow -\omega_i^2$ значения сопротивлений будут определяться простыми дробями, соответствующими выделенному полюсу:

$$Z(s) \approx \frac{k}{s^2 + \omega_i^2}; \quad z_{ik} \approx \frac{k_{ik}}{s^2 + \omega_i^2},$$

где k, k_{ik} — положительные вещественные вычеты Z и z_{ik} в полюсе $s^2 = -\omega_i^2$.

Подставив эти значения в (2.2), получим п. в. квадратичную форму для вычетов полюса на мнимой оси, которая принимает только положительные значения при всех x_i :

$$k = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 \geq 0. \quad (2.3)$$

Из положительности главных миноров определителя матрицы квадратичной формы

$$k = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}$$

получаем условие вычетов в полюсе на мнимой оси

$$k_{11} \geq 0; \quad k_{22} \geq 0; \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0. \quad (2.4)$$

Из условий (2.3) и (2.4) заключаем, что вычет z_{12} в полюсе на мнимой оси должен быть вещественным, положительным или отрицательным.

Если z_{11} (z_{22}) не имеет полюса, содержащегося в z_{22} (z_{11}) и $k_{11} = 0$ ($k_{22} = 0$), то из (2.4) следует, что $k_{12} = 0$, т. е. z_{12} не может иметь полюса на мнимой оси, не содержащегося в z_{11} и z_{22} одновременно. Последние же, как указывалось, могут иметь полюса, не содержащиеся в z_{12} .

Передаточное сопротивление может иметь полюс в бесконечности лишь в том случае, если такой полюс имеют одновременно z_{11} и z_{22} . В этом случае степень числителя z_{12} может на единицу превышать степень знаменателя. Вообще же степень числителя может быть любой в пределах от 0 до $n+1$, где n — степень знаменателя.

Рассмотрим вещественную часть z_{12} при $s = j\omega$, когда

$$z_{ik} = r_{ik}(\omega) + jx_{ik}(\omega); \quad Z(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega). \quad (2.5)$$

Равенство (2.2) для вещественных частей сопротивлений получает вид

$$r_{11}x_1^2 + 2r_{12}x_1x_2 + r_{22}x_2^2 = r \geq 0. \quad (2.6)$$

Имеем п. в. квадратичную форму, которая положительна при всех значениях x_i . Элементами ее матрицы являются веществен-

ные части параметров сопротивлений четырехполюсника

$$\Gamma = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Здесь $r_{11} \geq 0$ и $r_{22} \geq 0$.

Из положительности главных миноров определителя матрицы получаем условие вещественных частей

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 \geq 0. \quad (2.8)$$

Из рассмотрения этого условия можно сделать следующие выводы:

1. Вещественная часть передаточного сопротивления z_{12} может принимать отрицательные значения. Следовательно, z_{12} не является п. в. ф. и не имеет тех ограничений, которые налагаются на входное сопротивление.

2. При частотах $s = s_k^*$, совпадающих с нулями z_{11} или z_{22} , где $z_{11} = r_{11} = 0$, или $z_{22} = r_{22} = 0$, вещественная часть должна быть равна нулю и z_{12} должно принимать чисто мнимое значение.

Таким образом, ограничения, налагаемые на передаточное сопротивление и передаточную проводимость, состоят в том, что их полюса должны лежать в левой полуплоскости: на мнимой оси допускаются только простые полюса с вещественными вычетами. На нули в общем случае особых ограничений не накладывается — они могут быть кратными и располагаться всюду на плоскости s .

Перейдем к рассмотрению свойств параметра передачи цепей частного вида.

Выясним свойства параметра передачи неуравновешенных четырехполюсников без взаимной индуктивности, имеющих, как указывалось, наибольшее практическое значение. Указанную структуру всегда можно привести к эквивалентной T- или П-образной структуре путем последовательного применения преобразований звезды в треугольник и треугольника в звезду, выполняемых по известным формулам:

$$Y_i = \frac{Y_{ik}Y_{il}}{\Sigma Y}; \quad Z_{ik} = \frac{Z_i Z_k}{\Sigma Z}. \quad (2.9)$$

Поскольку выражения (2.9) содержат только операции умножения и суммирования, то коэффициенты полиномов числителя и знаменателя проводимостей или сопротивлений ветвей эквивалентной звезды или треугольника будут непременно положительными, хотя Y_i и Z_{ik} могут и не удовлетворять условиям положительной вещественной функции.

Положительными будут также коэффициенты числителей и знаменателей параметров неуравновешенных четырехполюсников без взаимной индуктивности. Действительно, для П-образной эквивалентной структуры (рис. 2.2, а) непосредственным вычислением получаем следующие выражения z-параметров:

$$z_{11} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \quad z_{22} = \frac{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \quad z_{12} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_1 + Z_3}. \quad (2.10)$$

Из этих выражений видно, что знаменатели всех трех z -параметров четырехполюсника, имеющего параллельные ветви на входе и выходе, одинаковы, а числитель параметра передачи z_{12} всегда меньше числителя параметров z_{11} и z_{22} . Следовательно, коэффициенты числителя параметра z_{12} не превышают значений коэффициентов при той же степени s числителей параметров z_{11} и z_{22} .

Указанное соотношение коэффициентов, называемое условием Фиалкова, неприменимо в случае неодинаковых полюсов параметров, что может быть следствием совпадения и сокращения некоторых полюсов с нулями параметра z_{12} , а также наличия последовательных (параллельных) ветвей на входе и выходе при определении $z(y)$ параметров.

Из постоянства (положительности) знаков коэффициентов числителя z_{12} следует, что параметр передачи рассматриваемого вида четырехполюсника не может иметь нуля на положительной вещественной оси (по правилу Декарта число положительных нулей полинома равно числу перемен знака в ряду его коэффициентов).

Перейдем теперь к рассмотрению частного случая простой цепи лестничной (цепной) структуры. Для выяснения расположения нулей z_{21} выделим у четырехполюсника цепной структуры Г-образное звено, состоящее из параллельной

(поперечной) ветви с проводимостью Y_a и последовательной (продольной) ветви с сопротивлением Z_b . Остальную часть четырехполюсника, расположенную справа от звена, представим в виде трехполюсника с параметрами z'_{ik} (рис. 2.2, б).

Сопротивление передачи результирующего четырехполюсника $z_{21} = U'_2/I_1$ (при $I_2 = 0$) определяется входным током. Ток на входе трехполюсника с параметрами z'_{ik} при разомкнутом выходе:

$$I'_1 = \frac{U'_1}{z'_{11}} = \frac{U'_2}{z'_{21}}.$$

Так как напряжение на входе звена:

$$U_1 = U'_1 + Z_b I'_1 = (z'_{11} + Z_b) I'_1,$$

то входной ток четырехполюсника

$$I_1 = I'_1 + Y_a U_1 = I'_1 [1 + Y_a (z'_{11} + Z_b)] = [1 + Y_a (z'_{11} + Z_b)] U'_2 / z'_{21}.$$

Искомое передаточное сопротивление

$$z_{21} = \frac{U'_2}{I_1} = \frac{z'_{21}}{1 + Y_a (z'_{11} + Z_b)}. \quad (2.11)$$

Это выражение будет обращаться в нуль при тех значениях s , при которых Y_a и Y_b принимают бесконечные значения.

Следовательно, нулями передачи четырехполюсника цепной структуры являются полюса сопротивления последовательной ветви и проводимости параллельной ветви, которые не могут находиться в правой полуплоскости.

Имеются исключения из этого правила. Согласно (2.11), если полюс Y_a совпадает с нулем сопротивления $z'_{11} + Z_b$ остальной части цепи, то он сократится и не будет нулем передачи. В этом случае при частоте, равной полюсу, получим две параллельные короткозамкнутые ветви, производящие деление и передачу сигнала к выходу цепи. Аналогично, если полюс Z_a совпадает с полюсом параметра z'_{11} остальной части цепи, то он сократится и не будет нулем передачи. При этом на частоте, равной полюсу, получим две последовательные разомкнутые ветви, производящие деление и передачу сигнала к выходу цепи.

Рассмотрим частные случаи четырехполюсников с двумя видами элементов.

Полюса передаточного сопротивления реактивного четырехполюсника, так же как и полюса z_{11} и z_{22} , являются простыми и лежат на мнимой оси, так что знаменатель z_{12} должен быть четным или нечетным полиномом.

Поскольку вещественные части входных сопротивлений $r_1 \equiv r_2 \equiv 0$, то согласно (2.8) вещественная часть передаточного сопротивления $r_{12} \equiv 0$.

Передаточное сопротивление должно быть мнимым и, следовательно, нечетной рациональной дробью — его числитель должен соответственно быть нечетным или четным полиномом в зависимости от четности или нечетности знаменателя.

Вычеты z_{12} в полюсах на мнимой оси могут быть отрицательными.

Нули z_{12} , являющиеся нулями четного или нечетного полинома, на плоскости s располагаются в квадрантной симметрии, так что часть их будет лежать в правой полуплоскости.

В случае лестничной цепи из реактивных элементов без взаимной индуктивности нули передачи, определяемые полюсами сопротивлений и проводимостей последовательных и параллельных ветвей, будут лежать на мнимой оси.

В случае RC - и RL -четырёхполюсников полюса передаточных сопротивлений (проводимостей) должны быть простыми и лежать на отрицательной вещественной оси, так же как и полюса z_{11} и z_{22} .

Вычеты в указанных полюсах согласно (2.4) могут быть отрицательными. Соответственно нули z_{12} могут принимать любые значения — вещественные и комплексные.

В случае лестничных цепей без взаимной индуктивности нули передачи, очевидно, располагаются на вещественной отрицательной полуоси.

В заключение остановимся на свойствах функций передачи четырехполюсника, нагруженного активным сопротивлением, величину которого удобно нормировать, принимая $Z_n = 1$.

Будем рассматривать функцию передачи напряжений, которая согласно (В.6) определяется двумя параметрами — проводимостями короткого замыкания:

$$H_U = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + 1}. \quad (2.12)$$

Запишем параметры, приняв их полюса одинаковыми, в виде отношения полиномов $m_{ik}(s)$ и $n_{ik}(s)$:

$$y_{22} = \frac{m_{22}(s)}{n_{22}(s)}; \quad -y_{21} = \frac{m_{21}(s)}{n_{21}(s)} = \frac{m_{21}(s)}{n_{22}(s)}. \quad (2.13)$$

Здесь степени полиномов $m_{22}(s)$ и $n_{22}(s)$ не могут отличаться более, чем на единицу; степень же $m_{21}(s)$ может быть любой в пределах от нуля до значения степени $m_{22}(s)$.

Функция передачи при учете (2.13) получит вид

$$H_U(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{m_{21}(s)}{m_{22}(s) + n_{22}(s)}. \quad (2.14)$$

Знаменатель функции передачи, определяемый нулями п. в. ф. $y_{22} + 1$, является полиномом Гурвица. Числитель определяется нулями передаточной проводимости y_{21} . Поэтому нули функции передачи могут находиться всюду на плоскости s . В случае неуравновешенной цепи без взаимной индуктивности не должно быть нулей на положительной вещественной полуоси; если при этом четырехполюсник реактивный, то числитель (2.14) должен быть четным или нечетным.

В случае лестничной цепи нули (2.14) не должны находиться в правой полуплоскости, а в случае реактивной лестничной цепи — располагаются только на мнимой оси. Очевидно, к функции передачи неуравновешенного четырехполюсника без взаимной индуктивности применимо условие Фиалкова: *коэффициенты ее числителя не превышают соответствующих коэффициентов знаменателя*. Поэтому при вещественных положительных значениях $s = \sigma$ значение функции передачи также вещественное, не превышает единицы:

$$H(\sigma) \leq 1 \quad (s = \sigma > 0). \quad (2.15)$$

Случай $H(\sigma) = 1$ возможен только при равенстве коэффициентов при старших или младших степенях числителя и знаменателя.

§ 2.3. Реализация функций передачи реактивного четырехполюсника лестничной структуры

Пусть задана рациональная дробь, имеющая конечные полюса, лежащие в левой полуплоскости, и нули — только на мнимой оси. Как было показано в предыдущем параграфе, такая функция является функцией передачи реактивного четырехполюс-

ника лестничной (цепной) структуры, нагруженного активным сопротивлением.

Для определенности примем, что заданная функция является функцией передачи напряжений, которую можем записать с учетом (В.6):

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{M(s)}{N_2(s) + sN_1(s)} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + 1}. \quad (2.16)$$

Здесь $N_2(s)$, $N_1(s)$ — четные полиномы; $M(s)$ — четный или нечетный полином.

Построение четырехполюсника лестничной структуры начинается с определения его параметров. Для этого числитель и знаменатель (2.17) делятся на четную или нечетную части знаменателя в зависимости от того, нечетным или четным полиномом является числитель, с тем чтобы получить нечетную дробь для передаточной проводимости y_{21} .

В случае четного числителя, разделив числитель на нечетную часть знаменателя, имеем

$$H(s) = \frac{M(s)/sN_1(s)}{[N_2(s)/sN_1(s)] + 1} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + 1}. \quad (2.17)$$

Тождественное приравнивание членов равенства дает при четном $M(s)$:

$$\begin{aligned} y_{22} &= N_2(s)/sN_1(s); \\ -y_{21} &= M(s)/sN_1(s). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Аналогичным образом в случае нечетного числителя $M(s)$ найдем:

$$\begin{aligned} y_{22} &= sN_1(s)/N_2(s); \\ -y_{21} &= M(s)/N_2(s). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Легко убедиться, что полученные пары параметров отвечают условиям реализуемости параметров реактивных четырехполюсников.

Оба параметра имеют одинаковые полюса, но в частном случае некоторые из них могут совпадать с нулями y_{21} и сократиться. Нули обоих параметров различны, но в частном случае некоторые из них могут совпасть.

Пусть задана в качестве примера функция передачи

$$H_U(s) = \frac{s^2 + \gamma^2}{s^3 + s^2 + 2s + 1} = \frac{s^2 + \gamma^2}{s(s^2 + 2) + (s^2 + 1)}.$$

Числитель — четный полином; поделив числитель и знаменатель на нечетную часть знаменателя, имеем

$$H_U(s) = \frac{(s^2 + \gamma^2)/s(s^2 + 2)}{1 + (s^2 + 1)/s(s^2 + 2)} = \frac{-y_{21}}{1 + y_{22}}.$$

Параметры четырехполосника:

$$\begin{aligned} y_{22} &= (s^2 + 1)/s (s^2 + 2); \\ -y_{21} &= (s^2 + \gamma^2)/s (s^2 + 2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оба параметра имеют нуль при $s = \infty$; конечный нуль y_{22} в общем случае не совпадает с нулем $s^2 = -\gamma^2$ передаточной проводимости.

Рассмотрим метод реализации функции передачи по известным двум элементам матрицы проводимостей y_{22} и y_{21} , называемый методом смещения нуля.

Будем полагать полюса обоих параметров одинаковыми. Для выполнения этого условия цепь, реализуемая по y -параметрам, должна начинаться на правом конце (на выходе) с последовательной ветви и заканчиваться на левом конце (входе) также последовательной ветвью.

Суть метода состоит в такой реализации реактансной проводимости y_{22} от выхода к входу цепью с лестничной (цепочечной) структурой, чтобы при этом обеспечивалось получение нулей передаточной проводимости. Последние, как указывалось, совпадают с полюсами сопротивлений последовательных ветвей и полюсами проводимостей параллельных ветвей.

Последовательные и параллельные ветви лестничной цепи образуются в результате поочередного выделения полюсов сопротивлений Z_k и проводимостей Y_{k+1} , представляющих остатки после $(k-1)$ -го и k -го шага процесса реализации выходной проводимости y_{22} . Чтобы обеспечить совпадение выделяемых полюсов с нулями передачи и таким путем наряду с y_{22} реализовать передаточную проводимость y_{21} , применяют для каждого нуля процедуру, состоящую из двух шагов: смещения нуля и образования нуля передачи. Суть процедуры состоит в искусственном создании полюсов в реализуемых функциях Z_k и Y_{k+1} , совпадающих с нулями передачи, выделение которых и обеспечивает получение заданных нулей передачи.

Первый шаг — смещение нуля — производится с помощью частичного выделения полюса, т. е. вычитания из Z_k или Y_{k+1} простой дроби, которая в зависимости от того, какой полюс выделяется: в бесконечности ($s = \infty$), нуле ($s = 0$) или на конечной частоте $s^2 = -\omega_i^2$, имеет соответственно вид:

$$m_\infty s; m_0/s; m_i s/(s^2 + \omega_i^2), \quad (2.21)$$

где $m_\infty < k_\infty$; $m_0 < k_0$; $m_i < k_i$; k_i — вычеты в соответствующих полюсах.

Дроби (2.21) реализуются: последовательно присоединяемой ветвью соответственно из индуктивности, емкости и параллельного LC -контура — в случае частичного выделения полюса Z_k и параллельно присоединяемой ветвью соответственно из емкости, индуктивности и последовательного LC -контура — в случае частичного выделения полюса Y_{k+1} .

Остающаяся после вычитания одной из дробей (2.21) функция при $m_i < k_i$ будет иметь те же полюса или тот же знаменатель, что и исходная функция — частичное выделение полюса не снижает порядка реализуемой функции. Но числитель изменится, произойдет смещение нулей тем большее, чем больше значение m_i .

Значение m_i необходимо выбрать таким, чтобы один из смещаемых нулей функции, остающейся после частичного выделения полюса, совпал с подлежащим реализации нулем передачи. При этом существенно то, что частично выделенный полюс не будет нулем передачи в соответствии с установленным в предыдущем параграфе положением: этот полюс будет содержаться в параметрах остальной части цепи, подлежащей реализации.

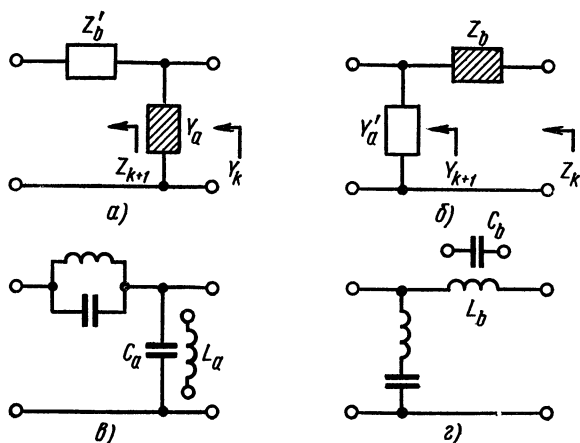


Рис. 2.3

Второй шаг — образование нуля — состоит в том, что рассматривается функция, обратная остатку, полюсом которого становится полученный после первого шага нуль. Полное выделение этого полюса обеспечит конечный нуль передачи. Соответствующая выделенному полюсу ветвь будет последовательным LC -контуром, присоединенным параллельно, в случае частичного выделения полюса Z_k и параллельным LC -контуром, присоединяемым последовательно, — в случае частичного выделения полюса Y_{k+1} .

Следовательно, каждый нуль передачи может быть образован с помощью Γ -образных звеньев двух видов:

1. Звена a (рис. 2.3, a), параллельная ветвь которого смещает нуль Y_k , а последовательная дает нуль передачи.
2. Звена b (рис. 2.3, $б$), последовательная ветвь которого смещает нуль Z_k , а параллельная ветвь дает нуль передачи.

Частичное выделение полюса дает избыточные элементы: один — в случае полюсов в нуле и бесконечности и два — в случае конечного полюса. Поэтому предпочтительнее смещение нулей производить частичным выделением полюсов в бесконечности или нуле,

когда элементами смещения являются индуктивность или емкость (рис. 2.3, в, з).

Рассмотрим выбор элементов обоих звеньев, образующих нуль передачи.

1. В звене a (рис. 2.3, а, в) из проводимости Y_k выделяется проводимость элемента смещения Y_a .

Для получения нуля $s^2 = -\gamma^2$ в оставшейся функции должно выполняться условие

$$Y_k(j\gamma) - Y_a(j\gamma) = 0.$$

Отсюда проводимость ветви смещения

$$Y_a(j\gamma) = jb_a = Y_k(j\gamma).$$

При $b_a > 0$ элемент должен быть емкостным, а при $b_a < 0$ — индуктивным соответственно со значениями

$$\begin{aligned} C_a &= b_a/\gamma; \\ L_a &= 1/\gamma |b_a|. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Оставшаяся функция $Y_{k+1} = Y_k - Y_a$ имеет нуль при $s^2 = -\gamma^2$. Выделив полюс, равный этому нулю, из обратной функции Z_{k+1} получим продольную ветвь из параллельного LC -контура с резонансной частотой γ и сопротивлением

$$Z'_a = \frac{ks}{s^2 + \gamma^2}, \quad (2.23)$$

где вычет $k = (s^2 + \gamma^2) Z_{k+1}(s) |_{s^2 = -\gamma^2}$.

2. В звене b (рис. 2.3, б, з) из сопротивления Z_k выделяется сопротивление элемента смещения Z_b .

Условие получения нуля $s^2 = -\gamma^2$ в остающейся функции дает

$$Z_k(j\gamma) - Z_b(j\gamma) = 0.$$

Отсюда сопротивление ветви смещения при $s = j\gamma$

$$Z_b(j\gamma) = jx_b = Z_k(j\gamma).$$

При $x_b > 0$ элемент смещения будет индуктивным, а при $x_b < 0$ — емкостным, значения которых равны:

$$\begin{aligned} L_b &= x_b/\gamma; \\ C_b &= 1/\gamma |x_b|. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Функция Y_{k+1} , обратная оставшейся после выделения ветви смещения функции, будет иметь полюс $s^2 = -\gamma^2$, выделение которого даст поперечную ветвь из последовательного LC -контура с проводимостью:

$$Y'_b = \frac{ks}{r^2 + \gamma^2}, \quad (2.25)$$

где $k = (s^2 + \gamma^2) Y_{k+1}(s) |_{s^2 = -\gamma^2}$ — вычет.

Для образования каждого конечного нуля передачи необходимо одно звено типа a или b , так что общее число звеньев равно числу конечных нулей передачи.

Изменяя очередность образования нулей передачи и тип примененного звена, можно получить ряд вариантов реализации, которые могут быть заранее намечены. Не все из намеченных вариантов реализации могут быть осуществлены физически, так как не всякий нуль передачи может быть получен при частичном выделении определенного полюса с ограниченным значением вычета.

Нули передачи, лежащие в бесконечности и нуле, не требуют звеньев и могут быть получены разложением Z_k или Y_k в цепную дробь делением числителя на знаменатель, начиная со старших или младших степеней. Каждый нуль $s = \infty$ реализуется продольной индуктивностью или поперечной емкостью, а каждый нуль $s = 0$ — продольной емкостью или поперечной индуктивностью.

Если в частном случае некоторые из нулей y_{21} совпадают с полюсами и сокращаются, то в первую очередь необходимо выделить из y_{22} избыточные полюса, не содержащиеся в y_{21} . Выделенные полюса дадут присоединяемые параллельно нагрузке последовательные LC -контур, число которых равно числу конечных избыточных полюсов.

В случае совпадения некоторых нулей y_{21} с нулями y_{22} желательно для получения более экономной реализации выделить сначала все конечные совпавшие нули из обратной функции $1/y_{22}$. В результате получим продольную ветвь из соединенных последовательно параллельных LC -контуров, число которых равно числу совпавших конечных нулей.

В качестве примера реализуем полученную пару простых параметров с одинаковыми полюсами (2.20):

$$y_{22} = (s^2 + 1)/s(s^2 + 2); \quad -y_{21} = (s^2 + \gamma^2)/s(s^2 + 2).$$

Параметр передачи имеет конечный нуль $s^2 = -\gamma^2$ и нуль в бесконечности.

Чтобы получить первую со стороны выхода ветвь продольной, реализацию начинаем с функции

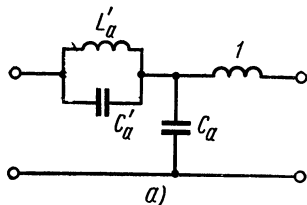
$$Z_1 = \frac{1}{y_{22}} = \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)}.$$

Можно наметить следующие варианты порядка реализации:

1) сначала выделяется из Z_1 полностью полюс $s = \infty$, обеспечивающий нуль передачи в бесконечности. Из функции, обратной остатку, выделяем звено a , обеспечивающее получение конечного нуля;

2) сначала с помощью звена b реализуется конечный нуль $s^2 = -\gamma^2$; из оставшейся после этого шага функции должна быть выделена последовательная ветвь из индуктивности, дающая нуль передачи в бесконечности.

По первому варианту (рис. 2.4, а) выделяем полюс в бесконечности, реализуемый последовательной индуктивностью, делением числителя Z_1 на знаменатель:



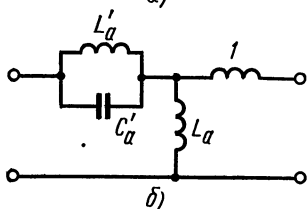
$$Z_1 = \frac{s(s^2+2)}{s^2+1} = sL_1 + Z_2 = s + \frac{s}{s^2+1}.$$

Функция, обратная остатку,

$$Y_2 = Z_2^{-1} = \frac{s^2+1}{s}$$

имеет полюс в бесконечности и начале.

Выделим звено a , обеспечивающее получение нуля передачи $s^2 = -\gamma^2$. Согласно (2.22)

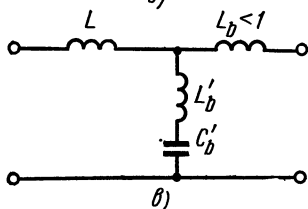


$$Y_2(j\gamma) = j b = \frac{-\gamma^2+1}{j\gamma} = j \frac{\gamma^2-1}{\gamma}.$$

При $\gamma^2 > 1$, $b > 0$ — поперечная ветвь будет емкостью

$$C_a = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2.$$

Оставшаяся функция, имеющая вид



$$Y_3(s) = Y_2 - sC_a = \frac{s^2+1}{s} - s(1-1/\gamma^2) = \frac{s^2+\gamma^2}{\gamma^2 s},$$

Рис. 2.4

дает продольную ветвь из параллельного LC -контура (рис. 2.4, а), обеспечивающего конечный нуль передачи.

При $\gamma^2 < 1$, $b < 0$ и поперечная ветвь будет индуктивностью

$$L_a = 1/(1 - \gamma^2).$$

Оставшаяся после ее выделения функция

$$Y_3(s) = Y_2 - \frac{1}{sL_a} = \frac{s^2+1}{s} - \frac{1-\gamma^2}{s} = \frac{s^2+\gamma^2}{s}$$

дает продольную ветвь также из параллельного LC -контура, дающего нужный нуль передачи (рис. 2.4, б).

По второму варианту из Z_1 выделим звено b , дающее конечный нуль $s^2 = -\gamma^2$. Согласно (2.24)

$$Z_b(j\gamma) = jx_a = j \frac{\gamma(2-\gamma^2)}{1-\gamma^2}.$$

Так как Z_1 имеет полюс в бесконечности с вычетом $k_\infty = 1$ и не содержит полюса при $s=0$, то возможно выделение только индуктивности, дающей последовательную ветвь (рис. 2.4, в):

$$0 < L_b = \frac{2-\gamma^2}{1-\gamma^2} < 1.$$

Реализация возможна, если конечный нуль $\gamma^2 > 0$.

После выделения L_b имеем остаток

$$Z_2 = Z_1 - sL_b = \frac{s(s^2+2)}{s^2+1} - \frac{s(2-\gamma^2)}{1-\gamma^2} = \frac{s}{\gamma^2-1} \cdot \frac{s^2+\gamma^2}{s^2+1}.$$

Полное выделение полюса $s^2 = -\gamma^2$ из функции $1/Z_2$ с вычетом $(\gamma-1/\gamma)^2$ дает поперечную ветвь из последовательного контура с проводимостью

$$(\gamma-1/\gamma) \cdot \frac{s}{s^2+\gamma^2}.$$

Остаток после вычитания этой дроби из $1/Z_2$, равный

$$(\gamma-1/\gamma)/s,$$

реализуется продольной ветвью из индуктивности, обеспечивая нуль в бесконечности.

Значение нуля передачи $2 > \gamma^2 > 1$ можно получить, если смещение производить частичным выделением полюса $s^2 = -1$. Данный вариант реализации не позволяет получить нули передачи $0 < \gamma^2 < 1$.

§ 2.4. Реализация функций передачи RC-четыреполюсников

Как было установлено в § 2.2, функция передачи RC-четыреполюсников с нагрузкой в виде активного сопротивления может иметь полюса только на вещественной отрицательной полуоси; нули же могут находиться в любой точке плоскости s , за исключением положительной вещественной полуоси в случае неуравновешенной структуры.

У лестничных четырехполюсников нули передачи должны находиться на отрицательной вещественной полуоси.

Для реализации функции передачи необходимо сначала определить два параметра четырехполюсника. Для этого знаменатель разбивается на два полинома с равными степенями n , нули которых лежат на вещественной отрицательной оси и взаимно чередуются, так что $N = N_a + N_b$. Рассматривая для определенности функцию передачи напряжений, имеем

$$H_U = \frac{-y_{21}}{y_{22}+1} = \frac{M(s)}{N_a(s)+N_b(s)} = \frac{M(s)}{(N_b/N_a)+1}. \quad (2.26)$$

Здесь принято, что ближайший к началу координат нуль имеет полином N_b , так что отношение N_b/N_a будет входной проводимостью RC-цепи.

Тождественно приравняв члены обеих частей равенства (2.26), имеем:

$$\begin{aligned} y_{22} &= N_b/N_a; \\ -y_{21} &= M(s)/N_a. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Указанное разбиение полинома с нулями на оси — σ

$$N(s) = (s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \dots (s + \sigma_n),$$

где $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$ всегда можно произвести. Для этого, приняв нули первого полинома $\sigma_{ai} > \sigma_i$, будем иметь

$$N_a(s) = K_a(s + \sigma_{a1})(s + \sigma_{a2}) \dots (s + \sigma_{an}). \quad (2.27')$$

При $K_a < 1$ второй полином степени n , равный разности

$$N_b(s) = N(s) - N_a(s) = K_b(s + \sigma_{b1})(s + \sigma_{b2}) \dots (s + \sigma_{bn}), \quad (2.28)$$

имеет нули на оси — σ , значения которых $\sigma_{bi} < \sigma_i$. Следовательно, нули N_a и N_b будут взаимно чередоваться. При $K_a = 1$ степень второго полинома будет равна $n - 1$.

Пусть, к примеру, задан полином второй степени

$$\begin{aligned} N(s) &= s^2 + 5s + 5,5 = \\ &= (s + 1,75)(s + 3,25). \end{aligned}$$

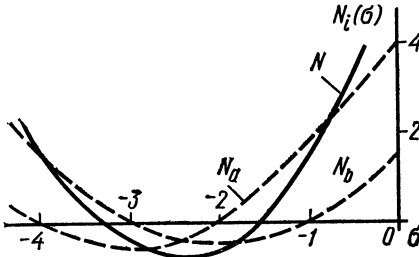


Рис. 2.5

В качестве полинома с двумя нулями, модули кото-

рых превышают модули соответствующих нулей заданного полинома, выберем трехчлен

$$N_a(s) = K_a(s + 2)(s + 4) = K_a(s^2 + 6s + 8).$$

Разность полиномов при $K_a = 0,5$ будет также полиномом второго порядка с нулями на оси — σ

$$\begin{aligned} N_b &= N - N_a = s^2 + 5s + 5,5 - 0,5(s^2 + 6s + 8) = \\ &= 0,5(s^2 + 4s + 3) = 0,5(s + 1)(s + 3). \end{aligned}$$

Нули составляющих полиномов лежат на вещественной отрицательной полуоси и взаимно чередуются. На рис. 2.5 показан график $N(\sigma)$, $N_a(\sigma)$ и $N_b(\sigma)$ при $\sigma < 0$.

Если задана функция передачи, знаменателем которой является рассмотренный полином второй степени

$$H_{11}(s) = \frac{s(s + \sigma)}{s^2 + 5s + 5,5} = \frac{2s(s + \sigma)}{(s + 2)(s + 4) + (s + 1)(s + 3)},$$

то параметры — проводимости четырехполюсника:

$$\begin{aligned} y_{22} &= (s + 1)(s + 3)/(s + 2)(s + 4); \\ -y_{21} &= 2s(s + \sigma)/(s + 2)(s + 4). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Активное сопротивление нагрузки, принадлежащее к классу RC-цепи, можно учитывать в неявном виде, включая его в параметр четырехполюсника, т. е. полагая в (2.27) $y'_{22} = y_{22} + 1$. В этом случае отпадает необходимость в разбиении знаменателя функции передачи. Для определения y -параметров достаточно

выбрать полином $Q(s)$ с вещественными отрицательными нулями, — σ_{qi} , которые чередуются с нулями σ_i знаменателя: $\sigma_i < \sigma_{qi}$. Функцию передачи можно представить

$$H_U = \frac{-y_{21}}{y'_{22}} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)/Q(s)}{N(s)/Q(s)}.$$

Параметры четырехполюсника:

$$\begin{aligned} y'_{22} &= N(s)/Q(s); \\ -y_{21} &= M(s)/Q(s), \end{aligned} \quad (2.30)$$

Если для приведенной выше функции передачи со знаменателем $N(s) = (s + 1,75)(s + 3,25)$ в качестве вспомогательного полинома принять $Q(s) = (s + 2)(s + 4)$, то получим параметры:

$$\begin{aligned} y'_{22} &= \frac{(s + 1,75)(s + 3,25)}{(s + 2)(s + 4)}; \\ -y_{21} &= \frac{s(s + \sigma)}{(s + 2)(s + 4)}. \end{aligned}$$

Указанные разбиение полинома и выбор вспомогательного полинома можно производить различным образом, соответственно будут различными параметры цепи. Величина элементов, полученных при реализации цепей, их входные сопротивления, а также постоянные множители K будут различными. При предъявлении определенных требований к этим характеристикам следует дополнительно выяснить влияние на них выбора пар параметров.

Реализация полученной пары параметров (2.27) или (2.30) зависит от вида нулей передачи.

Рассмотрим реализацию лестничной цепью для двух случаев расположения нулей:

- а) нули передачи вещественные отрицательные;
- б) нули передачи комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью.

Нули передачи на отрицательной вещественной полуоси. При расположении нулей передачи RC -четырёхполюсника на вещественной отрицательной полуоси для реализации пары его параметров — y_{21} и y_{22} (z_{21} и z_{22}) можно применить метод сдвига нулей, рассмотренный при реализации параметров реактивного четырёхполюсника лестничной структуры. При одинаковых полюсах обоих y -параметров (z -параметров), как указывалось в § 2.3, реализация должна начинаться на выходе и оканчиваться на входе последовательной (параллельной) ветвью.

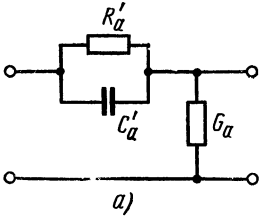
Если $Z_k = 1/Y_k$ — функция сопротивления, оставшаяся от $1/y_{22}$ после $(k - 1)$ шага процесса реализации, то для получения конечного ненулевого нуля передачи необходимо использовать Γ -образное звено вида a или вида b (рис. 2.3, a, b). При этом смещение нуля Z_k или Y_k лучше производить выделением ветви из активного сопротивления или активной проводимости. Схемы соот-

ветствующих звеньев, обеспечивающих получение конечного ненулевого нуля, приведены на рис. 2.6.

1. В звене *a* (рис. 2.6, *a*) параллельная активная проводимость $G < [\operatorname{Re} Y_k(j\omega)]_{\min}$, выделяемая из Y_k , должна дать нуль при $s = -\gamma_j$, так что

$$Y_k(-\gamma_j) - G_a = 0; \quad G_a = Y_k(-\gamma_j). \quad (2.31)$$

Оставшаяся функция $Y_{k+1} = Y_k - G_a$ имеет нуль при $s = -\gamma_j$. Выделение полюса $s = -\gamma_j$ из обратной функции Z_{k+1} дает продольную ветвь из параллельно соединенных R - и C -элементов с сопротивлением

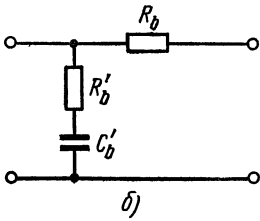


$$Z'_a = \frac{k_j}{s + \gamma_j},$$

где вычет $k_k = (s + \gamma_j) Z_{k+1}(s) |_{s = -\gamma_j}$.

Значение элементов

$$R'_a = \gamma_j / k_j; \quad C_a = 1 / k_j. \quad (2.32)$$



2. В звене *b* (рис. 2.6, *b*) последовательное активное сопротивление $R < [\operatorname{Re} Z_k(j\omega)]_{\min}$, выделяемое из Z_k , должно дать нуль при $s = -\sigma_j$, так что

$$Z_k(-\sigma_j) - R_b = 0; \quad R_b = Z_k(-\sigma_j). \quad (2.33)$$

Остаток $Z_{k+1} = Z_k(s) - R$ будет иметь нуль при $s = -\sigma_j$. Выделение его из обратной функции Y_{k+1} даст параллельную (поперечную) ветвь из последовательно соединенных R -и C -элементов с проводимостью

$$Y'_b(s) = \frac{k_j s}{s + \sigma_j},$$

где вычет $k_j = (s + \sigma_j) Y_{k+1}(s) |_{s = -\sigma_j}$.

Значения элементов:

$$R'_b = 1 / k_j; \quad C_b = k_j / \sigma_j. \quad (2.34)$$

Для каждого ненулевого конечного нуля передачи, не совпадающего с нулем y_{22} , требуется одно звено: типа *a* или *b*. Для известных параметров и нулей передачи можно наметить ряд вариантов реализующих схем, соответствующих различному порядку образования нулей с помощью двух типов звеньев. Не все из них могут дать цепи с положительными элементами.

Для получения нулей передачи в бесконечности и начале ($s = 0$), а также нулей, совпадающих с нулями y_{22} , не требуется выделение звеньев.

В качестве примера реализуем первую пару (2.29) полученных выше параметров, приняв нули передачи $s = \infty$ и $s = -\sigma$. Для

получения на выходе цепи последовательной ветви реализацию следует начинать с функции

$$Z = \frac{1}{y_{22}} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}.$$

Рассмотрим три варианта реализации.

1. Из сопротивления Z выделяем целую часть, равную $Z(\infty)=1$ и реализуемую в виде активного сопротивления $R_1=1$ (рис. 2.7, а). Остаток

$$Z_1 = Z - 1 = \frac{2s+5}{(s+1)(s+3)}.$$

Полное выделение из обратной функции полюса в бесконечности с вычетом 0,5, реализуемого параллельной ветвью из емкости $C_1=0,5$, обеспечит получение нуля передачи в бесконечности.

Остающаяся после этого шага проводимость

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{Z_1} - sC_1 = \\ &= \frac{(s+1)(s+3)}{2s+5} - 0,5s = \frac{1,5s+3}{2s+5} \end{aligned}$$

Для образования конечного нуля передачи $s = -\sigma$ выделим из $Z_2 = 1/Y_2$ звено b . Последовательное сопротивление звена согласно (2.33)

$$\begin{aligned} R_b &= Z_2(-\sigma) = \\ &= \frac{2s+5}{1,5s+3} \Big|_{s=-\sigma} = \frac{5-2\sigma}{3-1,5\sigma}. \end{aligned}$$

Положительное значение R не должно превосходить значения $Z_2(\infty)=4/3$, так что

$$0 \leq \frac{5-2\sigma}{3-1,5\sigma} \leq 4/3.$$

Эти неравенства удовлетворяются при $\sigma \geq 2,5$, поэтому рассматриваемый вариант позволяет образовать конечный нуль, модуль которого больше 2,5. Если принять $\sigma=4$, то $R_b=1$. Остаток после выделения этого сопротивления

$$Z_3 = Z_2 - 1 = \frac{2s+5}{1,5s+3} - 1 = \frac{0,5s+2}{1,5s+3}.$$

Обратную функцию можно представить как

$$Y_3 = 1,5 + \frac{1,5s}{s+4}.$$

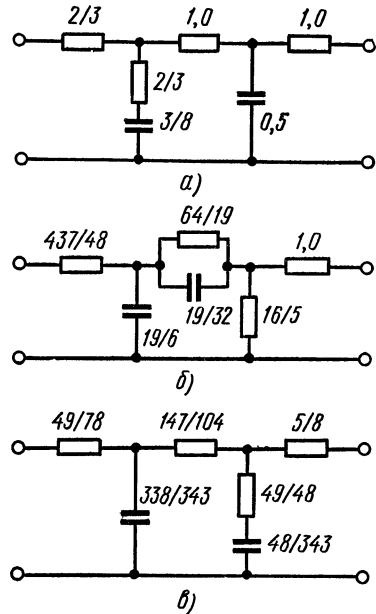


Рис. 2.7

Второе слагаемое дает поперечную ветвь, образующую нуль передачи $s = -4$ и состоящую из последовательно соединенных сопротивления и емкости $R_b = 2/3$; $C_b = 3/8$. Сопротивление $2/3$, соответствующее первому слагаемому, включается последовательно.

2. После первого шага предыдущего пункта из функции, обратной остатку

$$Y_1 = \frac{(s+1)(s+3)}{2s+5},$$

выделяется звено a , образующее конечный нуль (рис. 2.7, б).

Параллельная проводимость звена, согласно (2.31), равная

$$G_b = Y_1(-\sigma) = \frac{(1-\sigma)(3-\sigma)}{5-2\sigma},$$

не должна превосходить $Y_1(0) = 3/5$,

$$0 \leq \frac{(1-\sigma)(3-\sigma)}{5-2\sigma} \leq 3/5.$$

Отсюда модуль нуля, реализуемого данным вариантом, должен удовлетворять условию $\sigma \leq 1$, а также $2,8 \leq \sigma < 3$.

Примем $\sigma = 0,5$, тогда $C_b = 5/16$. Остаток после выделения этой проводимости

$$Y_2 = Y_1 - G_b = \frac{(s+1)(s+3)}{2s+5} - \frac{5}{16} = \frac{(s+0,5)(s-23/8)}{2s+5}.$$

Обратную функцию представляем в виде суммы простых дробей:

$$Z_2 = \frac{2s+5}{(s+0,5)(s+23/8)} = \frac{32/19}{s+0,5} + \frac{6/19}{s+23/8}.$$

Первое слагаемое дает продольную ветвь, образующую нуль передачи $s = -0,5$, из параллельно соединенных сопротивления $R_a = 64/19$ и емкости $C_a = 19/32$. Емкость второго слагаемого $C = 19/6$ включаем в виде параллельной ветви, которая образует нуль передачи в бесконечности; сопротивление $R = 437/48$ второго слагаемого включается в виде последовательной ветви, к которой присоединяется вывод входа.

3. Реализацию начинаем с выделения из сопротивления Z звена b образующего конечный нуль $s = -\sigma$ (рис. 2.7, в). Согласно (2.33) сопротивление последовательной ветви

$$R_b = Z(-\sigma) = \frac{(2-\sigma)(4-\sigma)}{(1-\sigma)(3-\sigma)}.$$

Положительное значение этого сопротивления не должно превосходить $Z(\infty) = 1$

$$0 \leq \frac{(2-\sigma)(4-\sigma)}{(1-\sigma)(3-\sigma)} \leq 1.$$

Неравенства удовлетворяются при $\sigma > 4$, а также при $2 < \sigma < 2,5$. Реализация по данному варианту позволяет образовать нули передачи, модули которых удовлетворяют этим условиям.

Если принять $\sigma = 7$, то $R = 5/8$ и остаток

$$Z_1 = Z - R_b = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \cdot \frac{(s+7)(s+7/3)}{(s+1)(s+3)}.$$

Из обратной функции выделяем полюс $s = -7$ с вычетом

$$k = (s+7) Y_1(s) |_{s=-7} = 96/49.$$

Соответствующую этому полюсу дробь

$$Y_b = \frac{(96/49)s}{s+7}$$

реализуем параллельной ветвью из соединенных последовательно сопротивления $R_b = 49/48$ и емкости $C_b = 48/343$. Эта ветвь образует конечный нуль передачи.

Остаток

$$Y_2 = Y_1 - Y_b = \frac{8}{3} \cdot \frac{(s+1)(s+3)}{(s+7)(s+7/3)} - \frac{(96/49)s}{s+7} = \frac{8}{21} \cdot \frac{\frac{13}{7}s+3}{s+7/3}.$$

Разложение величины, обратной остатку, в непрерывную дробь делением числителя на знаменатель, начиная со старших степеней завершает реализацию (рис. 2.7, в). Параллельная емкость образует передачи в бесконечности.

Нули передачи комплексные сопряженные в левой полуплоскости. Для образования комплексных нулей с отрицательными вещественными частями $s = -\alpha \pm j\beta$ применяют П-образное звено, приведенное на рис. 2.8, а, где указаны значения сопротивлений и проводимостей ветвей.

Последовательная ветвь звена образует пару сопряженных комплексных нулей передачи — полюса ее сопротивления Z_B принимаются равными $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$. Конечный нуль $s' = -\gamma$ Z_B совпадает с полюсами проводимостей Y_A и Y_D обеих параллельных ветвей. При частоте $s = -\gamma$ сопротивления всех трех ветвей обращаются в нуль, поэтому параллельные ветви не образуют нуля передачи — три короткозамкнутые при $s = -\gamma$ П-образные ветви не будут препятствовать прохождению сигнала от входа к выходу.

Следовательно, рассматриваемое звено обеспечивает получение только одной пары комплексных сопряженных нулей, лежащих в левой полуплоскости.

Рассмотрим последовательные шаги процесса выделения звена из подлежащей реализации проводимости Y_{k-1} , оставшейся после очередного шага реализации. Обозначения проводимостей ветвей и участков цепей, остающихся после удаления из Y каждой ветви, указаны на рис. 2.8, а.

1. В первую очередь из Y_{k-1} выделяется активная проводимость G_a такой величины, чтобы оставшаяся проводимость

$$Y_k = Y_{k-1} - G_a \quad (2.35)$$

удовлетворяла условию реализуемости звена.

Условие реализуемости звена состоит в том, что вещественная часть проводимости Y_k , из которой будет выделено П-образное звено, должна удовлетворять равенству

$$g_k = \operatorname{Re} [Y_k(s_1)] = \frac{b_k - \beta g'_k + \alpha b'_k}{(\alpha/\beta) b_k - \alpha g'_k - \beta b'_k}, \quad (2.36)$$

где g_k, b_k — вещественная и мнимая составляющие проводимости при $s = s_1 = -\alpha + j\beta$; g'_k, b'_k — вещественная и мнимая составляющие производной $Y'_k = dY_k/ds$ при $s = -\alpha + j\beta$.

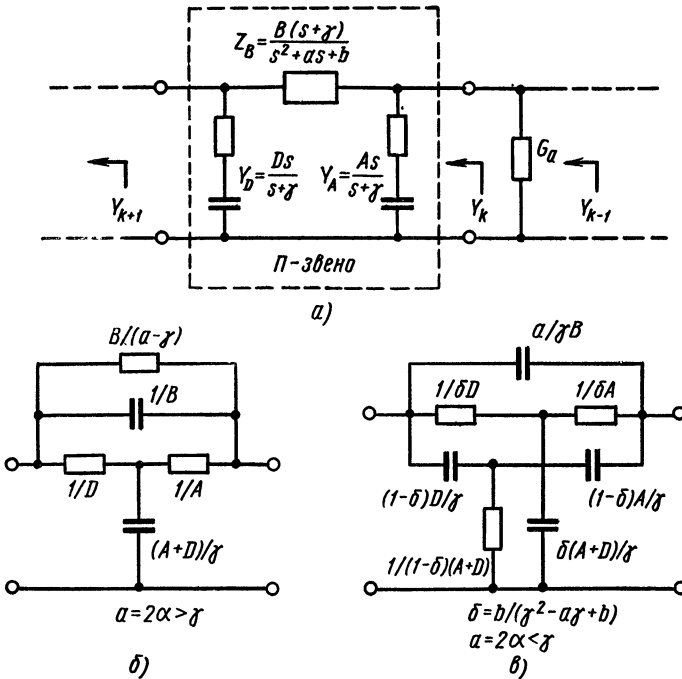


Рис. 2.8

Для выполнения условия реализуемости (2.36), вывод которого дается ниже, активная проводимость, выделяемая согласно (2.35) из заданной проводимости Y_{k-1} с вещественной частью g_{k-1} при $s_1 = -\alpha + j\beta$, не должна принимать отрицательных значений:

$$G_\alpha = g_{k-1} - g_k \geq 0. \quad (2.37)$$

Если это условие выполнено и выделена ветвь из активной проводимости (рис. 2.8, а), то можно приступить к получению рассматриваемого звена из оставшейся проводимости (2.35).

2. Выделяется первая справа параллельная ветвь с проводимостью $Y_A = As/s + \gamma$, после которого останется проводимость

$$Y_k^A = Y_k - Y_A = Y_k - As/s + \gamma. \quad (2.38)$$

Значения A и γ определяются из следующих соображений. При $s = s_1 = -\alpha + j\beta$, равном полюсу сопротивления Z_B , значение последнего равно бесконечности, что соответствует разрыву ветви B . Это означает, что проводимость остатка (2.38) при $s = s_1$ равна нулю: $Y_k^A(s_1) = 0$. При этом условии проводимость $Y_k(s)$ имеет нуль при $s = s_1$. Поэтому при $s = s_1 = -\alpha + j\beta$, приравняв (2.38) нулю, имеем

$$Y_k(s_1) = g_k + jb_k = \frac{As_1}{s_1 + \gamma} = \frac{A(-\alpha + j\beta)}{-\alpha + j\beta + \gamma}.$$

Приравнивание вещественной и мнимой частей дает искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\beta} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha/\beta) + g_k/b_k}; \\ A &= \frac{1}{\beta} \frac{g_k^2 + b_k^2}{(\alpha/\beta) + g_k/b_k}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

3. Определяется сопротивление Z_B последовательной ветви выделением полюса $s = s_1$ из функции, обратной Y_k^A :

$$Z_k^A = Z_B + Z_k^B = \frac{B(s + \gamma)}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2} + Z_k^B. \quad (2.40)$$

Выделенное сопротивление Z_B будет обеспечивать получение нулей передачи $s_{1,2} = -\alpha + j\beta$ лишь в том случае, если этих нулей не имеет оставшаяся проводимость $Y_k^B = 1/Z_k^B$, которая согласно (2.40) примет вид

$$\frac{1}{Y_k^B} = \frac{1}{Y_k^A} - \frac{1}{Y_B}.$$

Чтобы выполнить указанное условие, разность вычетов $1/Y_k^A$ и $1/Y_B$ в их общем полюсе s_1 должна быть равна нулю:

$$(s - s_1) \frac{1}{Y_k^A(s_1)} - (s - s_1) \frac{1}{Y_B(s_1)} = \frac{1}{Y_{k0}^A(s_1)} - \frac{1}{Y_{B0}(s_1)} = 0; \quad (s = s_1).$$

Здесь $Y_{k0}^A(s)$ и $Y_{B0}(s)$ не имеют нуля s_1 . При $s = s_1$ имеем после раскрытия неопределенности по Лопиталю

$$Y_0 = \frac{Y(s)}{s - s_1} \Big|_{s=s_1} = Y'(s_1). \quad (2.41)$$

Следовательно, условие, гарантирующее образование нуля s_1 рассматриваемым звеном, состоит в равенствах $Y_{k0}^A(s_1) = Y_{B0}(s_1)$ или

$$(Y_k^A)'_{s=s_1} = (Y_B)'_{s=s_1}. \quad (2.42)$$

Для физической реализуемости сопротивления Z_B коэффициент B должен быть вещественным. Значение его можно получить из равенства (2.40), умножив обе его части на $(s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2)/s + \gamma$ и полагая $s \rightarrow s_1$

$$B_k = \frac{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2}{s + \gamma} \Big|_{s=s_1} \frac{1}{Y_k^A} = \frac{s - s_2}{s + \gamma} \left(\frac{s - s_1}{Y_k^A(s)} \right)_{s=s_1}.$$

Заменяя выражение в скобках согласно (2.41) через производную $[(Y_k^A)'_{s=s_1}]^{-1}$ с учетом (2.42) при $s=s_1=-\alpha+j\beta$, получим

$$B_k = \frac{j2\beta}{\gamma - \alpha + j\beta} \left[\left(Y_k - \frac{As}{s+\gamma} \right)'_{s=s_1} \right]^{-1}.$$

Если подставить сюда значение A_k и γ_k из (2.39), отделить и приравнять нулю мнимую часть, то получим условие вещественности коэффициента B_k (2.36), приведенное раньше.

4. Определяется проводимость $Y_D = Ds/s + \gamma$ второй параллельной ветви звена выделением полюса $s = -\gamma$ из оставшейся проводимости

$$Y_k^B = (Z_k^A - Z_B)^{-1}.$$

Вычет в полюсе $-\gamma_k$

$$D = (s + \gamma_k) Y_k^B |_{s=-\gamma_k}. \quad (2.43)$$

После этого шага остается проводимость

$$Y_{k+1} = Y_k^B - Ds/(s + \gamma_k), \quad (2.44)$$

которая подлежит дальнейшей реализации с образованием нулей передачи с помощью соответствующих звеньев.

Полученное П-образное звено может быть преобразовано в эквивалентные трехполюсные схемы, состоящие из RC -элементов или RL -элементов.

На рис. 2.8, б показана эквивалентная схема в виде перекрытой Т-образной структуры из RC -элементов для случая $a = 2\alpha \geq \gamma$, а на рис. 2.8, в — схема в виде перекрытой двойной Т-структуры также из RC -элементов для $a = 2\alpha \leq \gamma$.

Убедиться в эквивалентности приведенных схем можно непосредственным сравнением y -параметров исходного звена и эквивалентной схемы.

§ 2.5. Реализация функций передачи мостовыми (скрещенными) четырехполюсниками

Симметричный четырехполюсник скрещенной или мостовой структуры показан на рис. 2.9, а и б. На рис. 2.10 изображена та же структура, но в ином (обычном) начертании с расположением выводов выхода справа; пунктирными линиями показаны ветви, проводимости которых Y_a и Y_b одинаковы с проводимостями изображенных ветвей.

Полагая на схеме рис. 2.9 короткозамкнутыми сначала выводы 2—2', а затем выводы 1—1', легко найти следующие выражения параметров:

$$\begin{aligned} y_{11} = y_{22} &= \frac{1}{2} (Y_a + Y_b); \\ y_{21} = y_{12} &= \frac{1}{2} (Y_b - Y_a). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Дуальные параметры сопротивлений, определяемые в режиме разрыва выводов:

$$z_{11} = z_{22} = \frac{1}{2} (Z_a + Z_b);$$

$$z_{12} = z_{21} = \frac{1}{2} (Z_b - Z_a).$$

Будем рассматривать функцию передачи напряжений, которую можно выразить через проводимости ветвей скрещенной схемы согласно (В.6) и (2.45)

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + 1} = \frac{Y_a - Y_b}{Y_a + Y_b}. \quad (2.46)$$

Для реализации функции передачи скрещенной структурой сначала необходимо определить из (2.46) проводимости Y_a и Y_b , которые должны быть положительными вещественными функциями. Затем следует реализовать обе проводимости.

Реализация функции передачи, следовательно, сводится к реализации двух входных проводимостей. При этом применяют реализацию функции передачи симметричными скрещенными схемами двух видов:

- 1) постоянного сопротивления;
- 2) общего вида.

Ограничимся рассмотрением реализации скрещенными схемами постоянного сопротивления.

Входное сопротивление симметричной скрещенной схемы принимает постоянное значение $Z=R$ в том случае, когда проводимости ветвей связаны следующим соотношением:

$$Y_a Y_b = 1/R^2; \quad Y_b = 1/Y_a R^2. \quad (2.47)$$

При нормированном значении входного сопротивления $R=1$ проводимости ветвей являются взаимно-обратными величинами и соответствующие им двухполюсники — взаимно-дуальными.

Чтобы определить выражение проводимости обеих ветвей по заданной функции передачи, умножим числитель и знаменатель (2.45) сначала на Y_a , а затем на Y_b . Тогда при учете того, что $Y_a Y_b = 1$, получим

$$H_U = \frac{1 - Y_b}{1 + Y_b} = \frac{Y_a - 1}{Y_a + 1}. \quad (2.48)$$

Отсюда искомые проводимости ветвей симметричной скрещенной структуры:

$$Y_a = \frac{1 + H_U}{1 - H_U}; \quad Y_b = \frac{1 - H_U}{1 + H_U}. \quad (2.49)$$

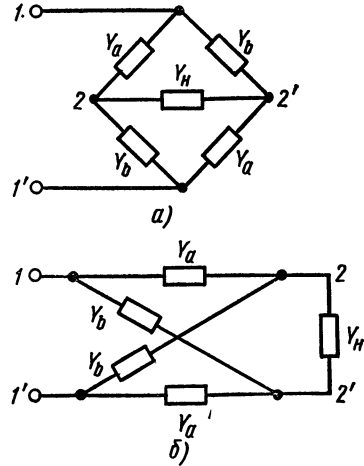


Рис. 2.9

Для того чтобы обе проводимости были физически реализуемыми п. в. ф., функция передачи должна удовлетворять следующим условиям:

1) значение модуля функции передачи не должно превышать единицы $|H_U(j\omega)| \leq 1$;

2) функция передачи не должна иметь полюсов на мнимой оси.

Никаких ограничений на нули функции передачи $H_U(s)$ не налагается — они могут находиться всюду, так что с помощью скрещенных структур могут быть реализованы функции передачи общего вида, в частности, неминимально-фазовых цепей.

Следует отметить, что условие $|H(j\omega)| \leq 1$ приводит к ограничению величины постоянного множителя.

При использовании скрещенных структур постоянного сопротивления функцию передачи высокого порядка обычно разбивают на множители — дроби первого и второго порядка (иногда третьего), для которых нетрудно получить реализующие схемы: построение цепи сводится к реализации входных функций первого и второго порядка. Полученные таким путем элементарные четырехполюсники с одинаковыми постоянными сопротивлениями соединяются каскадно.

Для дробей первого и второго порядка с типичным расположением нулей можно составить таблицу реализующих скрещенных схем постоянного сопротивления. При этом наибольший интерес представляют дроби с нулями

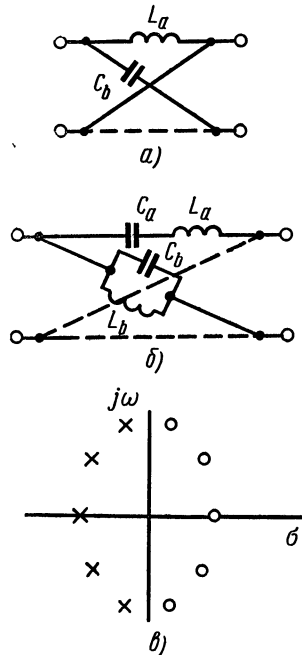


Рис. 2.10

в правой полуплоскости, не реализуемые простыми цепями лестничной структуры.

Рассмотрим примеры.

1. Задана функция передачи напряжений фазового контура первого порядка

$$H_U(s) = K \frac{s - a_0}{s + a_0}.$$

Условие реализуемости $|H_U(j\omega)| \leq 1$ выполняется при $K \leq 1$. Из (2.49) для случая $K=1$ имеем:

$$Y_a = \frac{1 - (s - a_0)/(s + a_0)}{1 + (s - a_0)/(s + a_0)} = \frac{a_0}{s}; \quad Y_b = \frac{s}{a_0}.$$

Продольные ветви являются индуктивностями $L_a = 1/a_0$, а скрещивающиеся ветви — емкостями $C_b = 1/a_0$ (рис. 2.10, а).

2. Задана функция передачи фазового контура второго порядка

$$H_U(s) = K \frac{s^2 - a_1 s + 1}{s^2 + a_1 s + 1}.$$

Подстановка этого выражения при $K=1$ в (2.49) дает:

$$Y_a = \frac{a_1 s}{s^2 + 1}; \quad Y_b = \frac{s^2 + 1}{a_1 s}.$$

Продольные ветви являются последовательными резонансными контурами с $L_a = 1/a_1$ и $C_a = a_1$, а скрещивающиеся ветви — параллельными контурами с $L_b = a_1$ и $C_b = 1/a_1$ (рис. 2.10, б).

Рассмотренные функции передачи неминимально-фазовых цепей, названных фазовыми контурами, обладают тем свойством, что их нули s'_k , расположенные в правой полуплоскости, являются зеркальными отображениями относительно мнимой оси полюсов s_k , лежащих в левой полуплоскости (рис. 2.10, в). Если полином Гурвица знаменателя функции передачи

$$N(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = \prod_{k=1}^n (s - s_k),$$

то полином числителя, имеющий все нули в правой полуплоскости, можно записать следующим образом:

$$M(s) = N(-s) = (-s - s_1)(-s - s_2) \dots (-s - s_n) = \prod_{k=1}^n (-s - s_k).$$

Функция передачи фазового контура n -порядка

$$H(s) = K \frac{M(s)}{N(s)} = K \frac{N(-s)}{N(s)} = K \prod_{k=1}^n \frac{(-s - s_k)}{(s - s_k)}.$$

При $s = j\omega$ функция передачи представится как

$$H(j\omega) = K \frac{N(-j\omega)}{N(j\omega)} = K \frac{|N| e^{-j\varphi}}{|N| e^{j\varphi}} = K e^{-j2\varphi(\omega)}.$$

Модуль функции передачи или амплитудная характеристика не зависит от частоты — является постоянной величиной. Фазовый угол равен $2\varphi(\omega)$, где $\varphi(\omega)$ — фазовый угол минимально-фазовой функции передачи, все нули которой лежат в бесконечности, т. е. функции с числителем, равным постоянной величине.

В силу постоянства амплитудной характеристики фазовые контуры пропускают одинаково сигналы всех частот без затухания. Фазовые контуры находят применение в тех случаях, когда необходимо изменять нужным образом (корректировать) фазовую характеристику системы без изменения ее амплитудной характеристики. Как мы видели, фазовые контуры реализуются каскадно-соединенными реактивными симметричными мостовыми схемами постоянного сопротивления.

Недостаток мостовой схемы, как указывалось, состоит в том, что она является уравновешенной структурой, у которой невозможно заземление выводов входа и выхода. Кроме того, общее

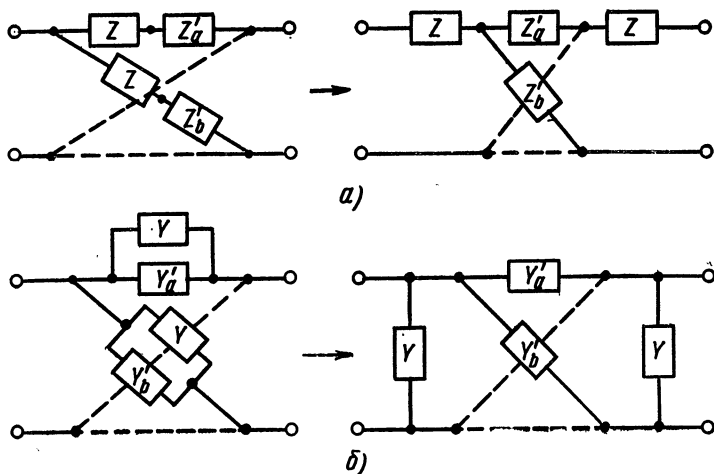


Рис. 2.11

число элементов в четырех ветвях схемы получается очень большим. В некоторых случаях (не во всех) можно устранить оба указанных недостатка преобразованием мостовой схемы в эквивалентную неуравновешенную структуру. Укажем на некоторые приемы преобразования мостовой схемы, без применения взаимной индуктивности, опуская доказательства.

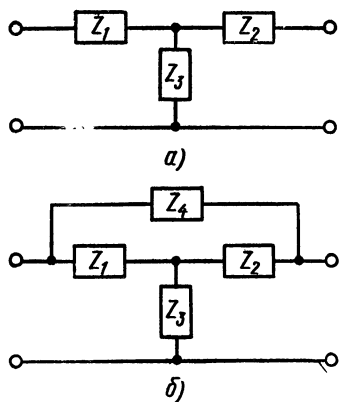


Рис. 2.12

1. Если ветви a и b мостовой схемы имеют одинаковые последовательно соединенные части с сопротивлением Z , то эти части могут быть выделены из обеих ветвей и присоединены последовательно с выводами входа и выхода (рис. 2.11, a).

2. Аналогично на дуальной основе при наличии у ветвей a и b одинаковых параллельно соединенных частей с проводимостью Y эти части можно выделить и присоединить параллельно выводам входа и выхода (рис. 2.11, b).

3. Оставшуюся часть мостовой цепи можно попытаться преобразовать в эквивалентную Т-образную структуру или перекрытую Т-образную структуру (рис. 2.12, a , b). Такое преобразование не всегда возможно. Так, для Т-образной схемы сопротивления

продольных и поперечной ветвей равны:

$$Z_3 = z_{12} = \frac{1}{2} (Z_b - Z_a); \quad Z_1 = Z_2 = z_{11} - z_{12} = Z_a.$$

Очевидно, далеко не всегда обеспечивается п. в. характер сопротивления Z_3 . В случае реактивных или резистивно-емкостных ветвей a и b мостовой схемы для применения приемов 1 и 2 следует находить эквивалентные двухполюсные ветви, имеющие одинаковые части. При этом равенство сопротивлений или проводимостей этих частей не обязательно — достаточно выделить наименьшее из значений сопротивлений или проводимостей.

Значения сопротивлений ветвей эквивалентных схем и, следовательно, доказательство условий эквивалентности можно получить с помощью непосредственного приравнивания параметров z_{ik} или y_{ik} четырехполюсных схем.

§ 2.6. Реализация по методу Дарлингтона

В реализации по методу Дарлингтона принимается структура цепи, состоящая из реактивного четырехполюсника, на выходе которого присоединено резистивное сопротивление R_2 (рис. 2.13, а). Метод Дарлингтона можно рассматривать двояко: как метод реализации функции входного сопротивления или как метод реализации заданного модуля функции передачи четырехполюсником без потерь с одним резистивным элементом на выходе и определенным входным сопротивлением. Это двоякое рассмотрение является следствием связи, существующей между квадратом модуля функции передачи и вещественной частью входного сопротивления цепи принятой структуры.

Главное достоинство метода Дарлингтона состоит в том, что на его основе можно производить реализацию функций передачи с учетом внутреннего сопротивления источника, т. е. с помощью структуры из реактивного четырехполюсника, на входе и выходе которого присоединены резистивные двухполюсники (рис. 2.13, б).

Подобную цепь из двусторонне нагруженного четырехполюсника без потерь широко применяют на практике, в частности при проектировании реактивных фильтров, согласующих цепей и т. д.

В этом параграфе дается краткое изложение основных положений метода Дарлингтона. Следует сразу же отметить, что здесь реализация модуля функции передачи производится не при произвольном, а вполне определенном входном сопротивлении. Поэтому построение цепи должно производиться не по двум, а

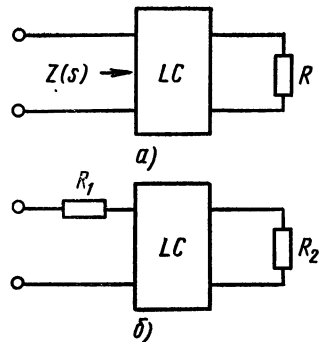


Рис. 2.13

по трем параметрам четырехполосника. Процесс реализации существенно усложняется. В общем случае оказывается невозможным обойтись без взаимной индуктивности, а иногда — без взаимной индуктивности с единичным коэффициентом связи. Только в частных случаях удается получить практически более приемлемую структуру без взаимной индуктивности. Входное сопротивление цепи со стороны входа реактивного четырехполосника, нагруженного активным сопротивлением R_2 , обозначим через $Z(s)$.

Поскольку реактивный четырехполосник не имеет потерь, то средняя за период (активная) мощность, поступающая в цепь от источника в установившемся синусоидальном режиме,

$$P = |I_1(j\omega)|^2 \operatorname{Re} Z(j\omega)$$

должна быть равна средней за период мощности, выделяемой на нагрузке

$$P_2 = \frac{1}{R_2} |U_2(j\omega)|^2 = \operatorname{Re} Z(j\omega) |I_1(j\omega)|^2.$$

Отсюда квадрат модуля сопротивления передачи при $s = j\omega$

$$|Z_{12}|^2 = \left| \frac{U_2}{I_1} \right|^2 = R_2 \operatorname{Re} Z(j\omega) \quad (2.50)$$

определяется вещественной частью входного сопротивления. При нормированном значении нагрузочного сопротивления $R_2 = 1$ квадрат модуля сопротивления передачи получается равным вещественной части входного сопротивления:

$$|Z_{12}|^2 = \operatorname{Re} Z(j\omega). \quad (2.51)$$

Квадрат заданной дробно-рациональной функции сопротивления передачи дает выражение вещественной части, по которому можно определить (§ В.4) входное сопротивление рассматриваемой цепи. Установленная связь между входным сопротивлением и сопротивлением передачи позволяет найти параметры искомого реактивного четырехполосника. Поскольку для пассивного четырехполосника известны как функция передачи, так и входное сопротивление, то должны быть определены три параметра, по которым затем следует построить цепь. Выразим входное сопротивление четырехполосника через z -параметры, используя уравнения (В.3). Выходное напряжение четырехполосника $U_2 = -R_2 I_2 = -I_2$ и выходной ток согласно второму уравнению

$$I_2 = \frac{-z_{21}}{z_{22} + 1} I_1.$$

Исключив с помощью этого выражения ток выхода в первом уравнении (В.3), для входного сопротивления цепи имеем

$$Z = \frac{U_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + 1} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} + z_{11}}{z_{22} + 1} = z_{11} \frac{(y_{22}^{-1} + 1)}{z_{22} + 1}. \quad (2.52)$$

Здесь использована известная из теории четырехполюсника связь между z - и y -параметрами

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}. \quad (2.53)$$

Найденное в виде дроби выражение входного сопротивления можем представить как

$$Z(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M_2 + sM_1}{N_2 + sN_1} = \frac{M_2}{sN_1} \cdot \frac{1 + sM_1/M_2}{1 + N_2/sN_1} = \frac{sM_1}{N_2} \cdot \frac{1 + M_2/sM_1}{1 + sN_1/N_2}, \quad (2.54)$$

где $M_1(s)$, $M_2(s)$, а также $N_1(s)$ и $N_2(s)$ четные полиномы с чередующимися попарно-сопряженными нулями на мнимой оси.

Тождественно приравняв члены выражения (2.52) и двух видов выражения (2.54), получим две различные формы значений параметров четырехполюсника:

случай А

$$\begin{aligned} z_{11} &= M_2/sN_1; \\ z_{22} &= N_2/sN_1; \\ y_{22} &= M_2/sM_1, \end{aligned} \quad (2.55)$$

случай Б

$$\begin{aligned} z_{11} &= sM_1/N_2; \\ z_{22} &= sN_1/N_2; \\ y_{22} &= sM_1/M_2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Параметры четырехполюсника выражены через отношения четной (нечетной) части числителя (или знаменателя) и нечетной (четной) части знаменателя (или числителя) п. в. ф. $Z(s)$. Можно показать, что отношения (2.55) и (2.56) являются реактансными функциями: их нули и полюса лежат на мнимой оси и взаимно чередуются. Доказательство этого положения мы опустим. Убедимся на частном примере в его справедливости. Пусть задана п. в. ф.

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3) + 2s(s^2 + 1,5)}{s(s^2 + 2) + 2(s^2 + 1)}.$$

На основе критериев, изложенных в § 1.2, можно убедиться в том, что эта функция удовлетворяет условиям п. в. ф. Нули четной и нечетной частей ее числителя, а также знаменателя лежат на мнимой оси и чередуются — их отношения представляют реактансные функции, поскольку как числитель, так и знаменатель являются полиномами Гурвица.

Запишем согласно (2.55) и (2.56) выражения параметров реактивного четырехполюсника:

случай А:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)}; \\ z_{22} &= \frac{2(s^2 + 1)}{s(s^2 + 2)}; \\ y_{22} &= \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{2s(s^2 + 1,5)}, \end{aligned}$$

случай Б

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{2s(s^2 + 1,5)}{2(s^2 + 1)}; \\ z_{22} &= \frac{s(s^2 + 2)}{2(s^2 + 1)}; \\ y_{22} &= \frac{2s(s^2 + 1,5)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}. \end{aligned}$$

Как видим, каждый из записанных параметров является реактансной функцией.

Выражения (2.55) и (2.56) дают два z -параметра и один y -параметр. Для построения четырехполюсника необходимо найти по ним третий параметр $z_{12} = z_{21}$, который согласно (2.53) будет

$$z_{12} = \sqrt{z_{11}z_{22} - z_{11}/y_{22}}.$$

При учете (2.55) и (2.56) имеем:
для случая А

$$z_{12} = \frac{1}{sN_1} \sqrt{M_2N_2 - s^2M_1N_1} = \frac{1}{sN_1} \sqrt{A(-s^2)}; \quad (2.57)$$

для случая Б

$$z_{12} = \frac{1}{N_2} \sqrt{s^2M_1N_1 - M_2N_2} = \frac{1}{N_2} \sqrt{-A(-s^2)}. \quad (2.58)$$

Здесь под знаком корня имеем четный полином, равный согласно (В.12) числителю четной или вещественной (при $s = j\omega$) части $Z(s)$

$$A(-s^2) = M_2N_2 - s^2M_1N_1 = (s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2) \dots (s_n^2 - s^2). \quad (2.59)$$

Для получения дробно-рационального параметра z_{12} необходимо под корнем иметь полный квадрат, для чего нули полинома $A(-s^2)$ должны быть четной кратности. Но, как было установлено в § 1.2, только вещественные отрицательные нули должны иметь четную кратность — остальные нули могут быть нечетной кратности, в частности однократными. Чтобы получить четную кратность всех нулей (2.59), числитель и знаменатель исходной п. в. ф. $Z(s)$ умножают на вспомогательный полином $Q(s) = Q_2 + sQ_1$ (полином Гурвица), изменяющих числитель ее четной части

$$Z = \frac{M_2 + sM_1}{N_2 + sN_1} \cdot \frac{Q_2 + sQ_1}{Q_2 + sQ_1} = \frac{\bar{M}_2 + s\bar{M}_1}{\bar{N}_2 + s\bar{N}_1}.$$

Перемножив полиномы в числителе и знаменателе, получим новое значение числителя четной части

$$\begin{aligned} \bar{A}(-s^2) &= \bar{M}_2\bar{N}_2 - s^2\bar{M}_1\bar{N}_1 = (M_2N_2 - s^2M_1N_1)(Q_2^2 - s^2Q_1^2) = \\ &= A(-s^2)(Q_2^2 - s^2Q_1^2). \end{aligned}$$

В качестве выражения в виде четного полинома, определяющего вспомогательный полином Гурвица

$$Q_2^2 - s^2Q_1^2 = Q(s)Q(-s), \quad (2.60)$$

необходимо выбрать те множители нулей $A(-s^2)$, которые имеют нечетную кратность. Нули выражения (2.60) будут иметь квадратную симметрию. Полином Гурвица $Q(s)$ образуется нулями, лежащими в левой полуплоскости.

Четная кратность нулей $\bar{A}(-s^2)$ обеспечивает дробно-рациональный вид параметра z_{12} . Для четырехполюсника без потерь параметр z_{12} должен быть нечетной дробью. В случае А знаменатель, как видно из (2.57), является нечетным. Поэтому $\sqrt{\bar{A}(-s^2)}$ должен быть четным. В случае же (2.58) знаменатель четный, так что корень квадратный из $\bar{A}(-s^2)$ должен быть нечетным. Такой случай будет иметь место, если один из нулей полинома $\bar{A}(-s^2)$ лежит в начале координат и появляется множитель $-s^2$. Следовательно, если у полинома $\bar{A}(-s^2)$ нет нулей нечетной кратности при $s=0$, то будем иметь случай А; если такие нули имеются, то получим случай В, так что оба случая исключают друг друга.

После нахождения полинома $\sqrt{\bar{A}(-s^2)}$, определяющего числитель z_{12} и вид соответствующего случая (А или В), по выражению входного сопротивления, числитель и знаменатель которого домножены на полином $Q(s)$, записываются параметры z_{11} и z_{22} , аналогично приведенному выше примеру. Можно показать, что найденные таким путем параметры реактивного четырехполюсника удовлетворяют условию реализуемости, именно, условие вычетов (2.4) выполняется со знаком равенства

$$k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0.$$

Нули z_{12} , как легко убедиться, совпадают с нулями четной части входного сопротивления $Z(s)$.

Построение реактивной цепи должно быть произведено по найденным трем параметрам z_{ik} . Задача реализации здесь намного усложняется по сравнению с рассматривавшейся в § 2.3 реализацией двух параметров четырехполюсника. В принципе построение четырехполюсника без потерь по трем элементам матрицы сопротивлений можно произвести обобщением метода Фостера разложения реактансных функций на сумму простых дробей (§1.3). Здесь разлагаются все параметры z_{ik} ; каждый набор трех простых дробей $z_{ik}^{(k)}$ с одинаковыми полюсами на оси $j\omega$ реализуется простейшим Т-образным реактивным четырехполюсником. Последовательное соединение элементарных четырехполюсников, дающее реализующую цепь, требует применения идеальных трансформаторов. И это является недостатком метода [2, 4], предложенного Кауэром.

Структуру Дарлингтона из реактивного четырехполюсника с резистивной нагрузкой можно получить также с помощью каскадной реализации [4]. Реализующая схема состоит из отдельных звеньев — неуровновешенных реактивных четырехполюсников, включенных каскадно (рис. 2.14, а). Каждый из четырехполюсников служит для выделения определенных видов нулей передачи,

которые совпадают с нулями четной части входного сопротивления $Z(s)$. Эти нули относительно s располагаются на плоскости s в квадрантной симметрии, а также на мнимой или вещественной осях.

Если сопротивление $Z(s)$, четная часть которого найдена по заданной функции передачи, содержит нули и полюсы на мнимой оси, включая $s=0$ и $s=\infty$, то их необходимо выделить в первую очередь. Они реализуются в виде продольных и поперечных ветвей из параллельного и последовательного резонансных контуров или в случае полюса при $s=\infty$ и $s=0$ — в виде ветвей

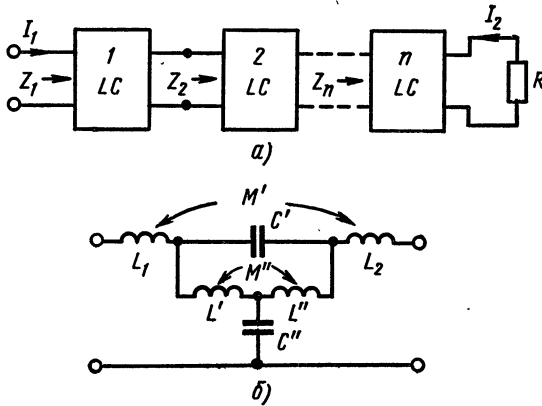


Рис. 2.14

из индуктивности и емкости. Здесь процедура аналогична начальной стадии реализации по Бруне.

После выделения нулей и полюсов $Z(s)$ на мнимой оси остается п.в.ф. $Z_1(s)$ меньшего порядка. Ее четная часть имеет нули указанных выше видов, которые совпадают с нулями передачи реализуемой цепи: четверки комплексно-сопряженных нулей с квадрантной симметрией или пары сопряженных мнимых, а также пары вещественных нулей. Для выделения каждой из систем указанных нулей используется отдельный реактивный четырехполюсник с параметрами z_{ik} . Каскадное соединение таких четырехполюсников (рис. 2.14, а) дает функцию передачи

$$-\frac{I_2}{I_1} = \frac{z'_{12}{}^{(1)}}{z'_{22}{}^{(1)} + Z_2} \cdot \frac{z'_{12}{}^{(2)}}{z'_{22}{}^{(2)} + Z_3} \cdots \frac{z'_{12}{}^{(n)}}{z'_{22}{}^{(n)} + R}.$$

Здесь Z_k — входное сопротивление k -го четырехполюсника.

Нулями функции передачи, как видим, являются нули, создаваемые сопротивлениями передачи отдельных четырехполюсников.

Для звена Бруне легко получить, рассматривая режимы холостого хода, следующие значения параметров:

$$z_{12} = z_{21} = \frac{s^2 CM + 1}{sC}.$$

При $M > 0$ нули передачи являются мнимыми, а при $M < 0$ — вещественными. Каждая пара мнимых сопряженных нулей или каждая пара вещественных нулей с различными знаками реализуется с помощью основного звена Бруне (см. рис. 1.16), содержащего взаимную индуктивность с совершенной связью. Для реализации четверки комплексных нулей с квадратной симметрией используется звено, содержащее две взаимные индуктивности с совершенной связью (рис. 2.14, б). Мы здесь не будем излагать довольно сложного процесса реализации нулей передачи с помощью указанных звеньев, приводимого в литературе по синтезу цепей.

После выделения всех нулей передачи с помощью звеньев без потерь останется постоянная величина, реализуемая резистивным элементом и, следовательно, получится структура Дарлингтона. В частном случае расположения нулей четной части $Z(s)$ на мнимой оси получим лестничную реактивную цепь без индуктивных связей.

§ 2.7. О реализации функции передачи реактивным четырехполюсником с двусторонней нагрузкой

На практике часто необходимо учитывать внутреннее сопротивление источника, имеющего обычно резистивный характер. Поэтому при проектировании ряда важных цепей — реактивных фильтров, реактивных согласующих цепей и т. п. — применяется структура, состоящая из реактивного четырехполюсника, на входе и выходе которого присоединены резистивные сопротивления: внутреннее сопротивление источника R_1 и нагрузочное сопротивление R_2 (см. рис. 2.13, б). Рассмотренный в § 2.3 метод реализации функции передачи по двум параметрам дает реактивный четырехполюсник лестничной структуры с односторонней нагрузкой только на выходе: сопротивление источника равно нулю. Лишь реализация функции передачи мостовой структурой постоянного сопротивления (§ 2.5) позволяет присоединять на входе последовательно с цепью резистивное сопротивление без влияния на функцию передачи. Но, как указывалось, недостаток мостовой схемы состоит в том, что она является уравновешенной и не позволяет заземлять один из выводов входа и выхода. Поэтому полезно иметь представление о реализации, использующей метод Дарлингтона и приводящей к двусторонне нагруженному реактивному четырехполюснику.

Будем рассматривать случай, когда резистивные сопротивления подключены как на выходе, так и входе четырехполюсника без потерь. Передающие свойства данной цепи характеризуются функцией передачи напряжений — отношением изображений напряжений на выходе (нагрузке) и на выводах источника напряжения U_0 :

$$H_U = U_2/U_0. \quad (2.61)$$

Найдем выражение функции передачи через параметры цепи, используя, как и в предыдущем параграфе, баланс мощностей. Мощность, передаваемая через четырехполюсник без потерь на нагрузку, равна мощности, поступающей на вход четырехполюсника:

$$P_2 = \frac{|U|^2}{R_2} = P_1 = \frac{|U_0|^2}{|R_1 + Z|^2} \operatorname{Re} Z(j\omega), \quad (2.62)$$

где $Z = r + jx$ — входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного сопротивлением R_2 .

Отсюда квадрат модуля функции передачи напряжений

$$\left| \frac{U_2}{U_0} \right|^2 = \frac{R_2 \operatorname{Re} Z(j\omega)}{|R_1 + Z|^2}. \quad (2.63)$$

Как видим, связь входного сопротивления с квадратом модуля функции передачи получается намного сложнее, чем соотношение (2.51): значение Z невозможно найти непосредственно из (2.63). Задача состоит в определении входного сопротивления четырехполюсника — реализация должна начинаться с определения параметров четырехполюсника по Z . Решение указанной задачи производится с помощью введения двух параметров рассеяния (§ В.6). Квадраты модулей параметров рассеяния равны нормированным значениям мощностей, если в качестве базисной нормирующей мощности принять максимальную мощность, которая может быть выделена на нагрузке при отсутствии реактивного четырехполюсника, т. е. непосредственном питании нагрузки, и полном согласовании ($R_2 = R_1$):

$$P_{2m} = |U_0|^2 / 4R_1.$$

Нормированное значение передаваемой нагрузке мощности численно равно квадрату модуля передаточного коэффициента S_{21} (В.6):

$$\frac{P_2}{P_{2m}} = \left| \frac{U_2}{U_0} \right|^2 \frac{4R_1}{R_2} = |S_{21}(j\omega)|^2 \leq 1. \quad (2.64)$$

Знак равенства выполняется только для тех частот, в которых имеет место оптимальное согласование и отсутствует отражение. При знаке неравенства имеет место отражение мощности от нагрузки — частичный ее возврат источнику.

Левую часть (2.64) при учете (2.63) можем представить как

$$\left| \frac{U_2}{U_0} \right|^2 \frac{4R_1}{R_2} = \frac{4R_1 r}{|R_1 + Z|^2} = 1 - \frac{|R_1 - Z|^2}{|R_1 + Z|^2} = 1 - |S_{11}(j\omega)|^2 = |S_{21}(j\omega)|^2. \quad (2.65)$$

Входящая сюда величина

$$S_{11} = (R_1 - Z) / (R_1 + Z)$$

является коэффициентом отражения на входе четырехполюсника. Полюса коэффициента отражения совпадают с нулями п.в.ф. $R_1 + Z$ и поэтому должны лежать в левой полуплоскости. Из выражения (2.64) следует, что разность между единицей, представляющей максимальную (полную) мощность, которая передается

нагрузке при оптимальном согласовании, и квадратом передаточного коэффициента является нормированной отраженной мощностью, равной квадрату модуля коэффициента отражения:

$$|S_{11}(j\omega)|^2 = 1 - |S_{21}(j\omega)|^2. \quad (2.66)$$

Следовательно, полная или располагаемая мощность, которая может быть передана источником нагрузке, равна сумме фактически передаваемой мощности и отраженной мощности. Если известно выражение коэффициента отражения, то входное сопротивление четырехполюсника

$$\dot{Z} = (1 - S_{11}) / (1 + S_{11}). \quad (2.67)$$

Определение входного сопротивления четырехполюсника по заданной функции передачи U_2/U_0 должно производиться в следующем порядке:

1. По заданной дробно-рациональной функции передачи определяется квадрат передаточного коэффициента S_{21} с помощью выражения (2.65), которое можно записать

$$|S_{21}(s)|^2 = S_{21}(s) S_{21}(-s) = \frac{4R_1}{R_2} \frac{U_2}{U_0}(s) \frac{U_2}{U_0}(-s). \quad (2.68)$$

Нули и полюса $|S_{21}|^2$ будут располагаться на плоскости в квадрантной симметрии, так как они образуются нулями и полюсами функции передачи и их зеркальными отображениями относительно мнимой оси.

2. По найденному выражению квадрата модуля S_{21} определяется коэффициент отражения согласно выражению (2.66), которое при $j\omega = s$ запишется как

$$|S_{11}(s)|^2 = S_{11}(s) S_{11}(-s) = 1 - S_{21}(s) S_{21}(-s) = 1 - |S_{21}(s)|^2. \quad (2.69)$$

Полюса S_{11}^2 совпадают с полюсами S_{21}^2 . В качестве полюсов S_{11} следует принять те полюса, которые лежат в левой полуплоскости, а в качестве нулей — любую половину нулей $|S_{11}|^2$. Очевидно, полюса S_{11} будут совпадать с полюсами заданной функции передачи.

3. Функция входного сопротивления определяется по формуле (2.67).

После определения функции входного сопротивления четырехполюсника можно применить метод синтеза по Дарлингтону, изложенный в предыдущем параграфе.

Рассмотрим пример. Пусть задана функция передачи напряжений цепи при $R_1 = R_2$

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{K}{s^2 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

По выражению (2.68) находим квадрат модуля передаточного коэффициента:

$$|S_{21}(s)|^2 = 4 \frac{K^2}{(2s^2 + 1)^2 - (s^2 + 2s)^2} = \frac{4K^2}{1 - s^4}.$$

Для квадрата модуля коэффициента отражения согласно (2.69) имеем при $K=0,5$:

$$|S_{11}(s)|^2 = S_{11}(s) S_{11}(-s) = 1 - \frac{1}{1-s^6} = \frac{-s^6}{1-s^6}.$$

Все нули этого выражения лежат в начале координат, а полюса располагаются в квадрантной симметрии. В качестве нулей S_{11} принимаем три нуля в начале координат; полюса же S_{11} будут совпадать с полюсами функции передачи. Поэтому

$$S_{11} = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Функция входного сопротивления

$$Z = \frac{1 - S_{11}}{1 + S_{11}} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

При проектировании реактивных фильтров представляет большой интерес получение цепи лестничной структуры с двусторонней нагрузкой. Функция передачи такой цепи имеет нули, расположенные на мнимой оси. Если в результате аппроксимации получена функция цепи с нулями на мнимой оси, то, как правило, удобнее не применять общий метод Дарлингтона, а попытаться реализовать ее более простыми методами. Один из простейших по идее методов состоит в принятии определенной структуры лестничной цепи и нахождении значений ее элементов приравниванием коэффициентов функции передачи искомой цепи и заданной (реализуемой) функции передачи.

Структура цепи устанавливается по числу и виду нулей и порядку реализуемой функции передачи. Порядок функции передачи определяет общее число реактивных элементов. Конечные нули передачи образуются продольными ветвями из параллельных LC -контуров и поперечными ветвями из последовательных LC -контуров. Нули в бесконечности образуются индуктивностями в продольных ветвях и емкостями в поперечных ветвях, а нули при $s=0$ — емкостями продольных ветвей и индуктивностями поперечных ветвей.

После определения структуры с помощью методов анализа необходимо получить выражение функции передачи; коэффициенты выражения будут содержать буквенные значения элементов. Приравняв эти коэффициенты соответственным коэффициентам заданной функции передачи, получим систему уравнений, из решения которой можно найти значения элементов. Число уравнений может оказаться меньше числа неизвестных — в этом случае значениями некоторых элементов необходимо задаться.

Трудность реализации с помощью рассматриваемого метода связана с тем, что уравнения для определения значений элементов получаются нелинейными. Поэтому при высоком порядке функции передачи решение производят методом последовательного приближения (итераций) — задаются некоторыми начальными зна-

чениями элементов (нулевое приближение) и производят уточнение до получения значений элементов с заданной точностью. Такой итерационный процесс можно осуществить по специальной программе с помощью цифровой вычислительной машины.

Рассмотрим пример. Требуется реализовать двусторонне нагруженной лестничной реактивной цепью функцию передачи третьего порядка:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Все три нуля функции передачи лежат в бесконечности. Цепь (рис. 2.15) будет состоять из трех реактивных элементов, образующих T-образную структуру с двумя последовательными индуктивностями L_1 и L_2 и поперечной емкостью C . Приняв сопротивления резистивных элементов на входе и выходе $R_1 = R_2 = 1$, имеем следующее выражение функции передачи:

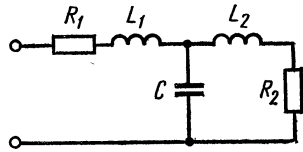


Рис. 2.15

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{s^3 L_1 L_2 C + s^2 C (L_1 + L_2) + s (L_2 + C) + 1}.$$

Приравнивание коэффициентов выражений функции передачи дает следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} L_2 + C &= 2; \\ C (L_1 + L_2) &= 2; \\ L_1 L_2 C &= 1. \end{aligned}$$

Для решения этой системы значение емкости из первого уравнения

$$C = 2 - L_2$$

подставляем в последнее уравнение

$$L_1 = \frac{1}{L_2 (2 - L_2)}.$$

Подставив значения C и L_1 во второе уравнение, получаем

$$L_2^3 - 2L_2^2 + 3L_2 - 2 = 0.$$

Вещественное решение этого кубического уравнения: $L_2 = 1$. Значения двух других элементов: $C = 1$; $L_1 = 1$.

Задачи

1. Задана дробно-рациональная функция передачи напряжений четырех-полюсника, нагруженного сопротивлением:

$$H_U(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{K}{(s^2 + 1)(s^2 + 9) + 4s(s^2 + 4)}.$$

Требуется:

- 1) определить вид цепи, которой может быть реализована функция;
- 2) найти два параметра проводимости четырехполюсника;
- 3) получить реализующую схему со значениями всех элементов.

2. Задана функция передачи напряжений четырехполюсника:

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Ks(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+9)+2s(s^2+4)}.$$

Требуется:

- 1) найти параметры проводимости цепи, нагруженной на сопротивление 1 Ом;
- 2) получить реализующие реактивные четырехполюсники;
- 3) определить коэффициент K -схемы;
3. Задана функция передачи токов четырехполюсника, нагруженного на сопротивление 1 Ом:

$$H_I(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{K(s^2+1)(s^2+5)}{s(s^2+4)(s^2+16)+10(s^2+1)(s^2+9)}.$$

Требуется:

- 1) найти параметры сопротивлений цепи;
- 2) найти реализующие реактивные четырехполюсники;
- 3) определить коэффициент K -цепи;
4. Реализовать функцию передачи напряжения

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\bar{K}(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+5)+2(s+2)(s+4)}$$

с помощью лестничной RC -цепи. Определить коэффициент K реализующих схем;

5. Реализовать функцию передачи токов

$$H_I(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{K(s^2+3s+2)}{s^3+13s^2+48s+51}$$

с помощью RC -четырёхполюсника;

6. Заданы функции передачи напряжений и токов:

$$H_U(s) = K \frac{(s^2-s+2)(s-1)}{(s^2+s+2)(s+1)},$$
$$H_I(s) = K \frac{(s^2-2s+3)(s-2)}{(s^2+2s+3)(s+2)}.$$

Требуется реализовать эти функции с помощью мостовой структуры постоянного сопротивления.

Глава III

Аппроксимация и синтез пассивных цепей по частотным и временным характеристикам

§ 3.1. Общие сведения

В предыдущих главах были рассмотрены свойства параметров и функций линейных пассивных цепей различного вида и приведены некоторые методы реализации заданных входных функций и функций передачи. Методы реализации служат базой, на основании которой решается любая задача синтеза электрических цепей.

Решение конкретной задачи синтеза начинается с определения на основе аппроксимации параметров или функций передачи, отвечающих условиям физической реализации цепью заданного класса и вида. Характеристики цепей должны с предписанной точностью аппроксимировать заданные характеристики — частотные или временные.

Этап аппроксимации по смыслу является приближенным, в отличие от этапа реализации, выполняемого точно: построенная в результате реализации цепь будет иметь в точности заданную функцию цепи.

Аппроксимируемая функция f , которая задается в различных формах: графической, табличной или аналитической, может быть функцией частоты или времени.

Введем обобщенную переменную x , которая может обозначать частоту или время.

Аппроксимирующая функция $g(x, a_i)$ содержит n неизвестных параметров — коэффициентов, которые должны быть определены в процессе аппроксимации из условия обращения в минимум ошибки приближения, т. е. разности

$$\Delta(x, a_i) = g(x, a_i) - f(x). \quad (3.1)$$

Существуют различные методы аппроксимации, а также различные критерии оценки приближения или отклонения аппроксимирующей функции от заданной. Приведем кратко некоторые сведения по приближению функций. Более полные сведения можно найти в [5].

Простейшим способом приближения является применение степенного ряда Тейлора. Разлагая в окрестности $x=h$ аппроксимирующую и аппроксимируемую функции, имеем:

$$\begin{aligned} g(x, a_i) &= m_0 + m_1(x-h) + m_2(x-h)^2 + \dots, \\ f(x) &= \mu_0 + \mu_1(x-h) + \mu_2(x-h)^2 + \dots \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $m_k(a_i)$ при $(x-h)^k$, пропорциональные производным $f^{(k)}(h)$, содержат искомые параметры аппроксимирующей функции.

Для определения n -параметров a_i приравнивают первые n коэффициентов обоих рядов и получают систему из n уравнений вида

$$m_k(a_i) = \mu_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.2)$$

Поскольку значения обеих функций и первых $n-1$ производных при $x=h$ равны, то степенной ряд для отклонения (ошибки) будет начинаться со степени n :

$$\Delta = g(x, a_i) - f(x) = (m_n - \mu_n)(x-h)^n + (m_{n+1} - \mu_{n+1})(x-h)^{n+1} + \dots$$

При $x=h$, следовательно, обеспечивается наибольшая точность приближения — здесь совпадают не только значения аппроксимируемой и аппроксимирующей функций, но и их первых $n-1$ производных. При удалении от точки $x=h$ ошибка возрастает.

Более равномерное на промежутке приближение может быть достигнуто при использовании интерполирования, когда требуется совпадение аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в заранее выбранных различных точках (узлах) промежутка приближения. Условие совпадения значений обеих функций в n узлах x_k дает систему уравнений для определения n параметров a_i :

$$g(x_k, a_i) = f(x_k) = f_k; \quad (k, i=0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.3)$$

Число узлов, следовательно, должно быть равно числу неизвестных параметров.

Если аппроксимирующая функция является полиномом или рациональной дробью, то (3.3) представляет систему линейных уравнений.

Следует отметить, что поскольку близость функций между узлами при интерполяции не контролируется, отклонения здесь могут оказаться чрезмерными. К сожалению, нельзя заранее выбрать узлы, приводящие к минимальным отклонениям.

Для иллюстрации сказанного найдем полином второй степени:

$$g(x, a_i) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad (3.4)$$

интерполирующий в интервале $0 \leq x \leq 2$ функцию

$$f(x) = 1 - e^{-x}. \quad (3.5)$$

Приняв три узла $x_i: 0, 1, 2$, имеем соответственно значения $f(x_i): 0; 0,632; 0,865$. Согласно (3.3) получаем $a_0=0$ и

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0,632; \\ 2a_1 + 4a_2 &= 0,865. \end{aligned}$$

Решение системы дает: $a_1=0,832; a_2=-0,20$.

Можно сразу написать выражение интерполяционного полинома без нахождения коэффициентов из решения системы линейных уравнений, если воспользоваться формулой Лагранжа [5].

Среднеквадратическое приближение требует обращения в минимум на основном промежутке среднеквадратической ошибки, выражаемой интегралом:

$$\Delta^2 = \int_a^b [g(x, a_i) - f(x)]^2 dx. \quad (3.6)$$

Значения параметров, обращающих в минимум выражение (3.6), можно найти из системы уравнений, которая получается в результате приравнивания нулю частных производных Δ^2 по всем параметрам:

$$\int_a^b g(x, a_i) \frac{\partial g}{\partial a_i} dx = \int_a^b f(x) \frac{\partial g}{\partial a_i} dx \quad (i=0, 1, 2 \dots n). \quad (3.7)$$

Если аппроксимирующая функция является полиномом $g(x, a_i) = \sum a_i x^i$, то частная производная $(\partial g / \partial a_i) = x^i$ и система (3.7) обращается в систему линейных уравнений:

$$\sum_{i=0}^n a_i \int_a^b x^{i+k} dx = \int_a^b f(x) x^k dx \quad (k=0, 1, 2 \dots n). \quad (3.8)$$

Для нахождения коэффициентов необходимо вычислить определенные интегралы и решить систему линейных уравнений. В качестве простейшего примера найдем полином второй степени (3.4), аппроксимирующий в среднеквадратическом смысле функцию (3.5) в интервале $0 \leq x \leq 2$. Вычислив определенные интегралы, входящие в (3.8), вида

$$\int_0^2 x^{i+k} dx; \int_0^2 x^k (1 - e^{-x}) dx \quad (i, k=0, 1, 2),$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2a_0 + 2a_1 + \frac{8}{3}a_2 &= 1,135; \\ 2a_0 + \frac{8}{3}a_1 + 4a_2 &= 1,405; \\ \frac{8}{3}a_0 + 4a_1 + \frac{32}{5}a_2 &= 2,020. \end{aligned}$$

Решение системы дает $a_0 = 0,0297$; $a_1 = 0,8019$; $a_2 = -0,1980$, так что аппроксимирующий полином

$$g(x, a_k) = 0,0297 + 0,8019x - 0,1980x^2.$$

Чебышевское или наилучшее равномерное, приближение требует обращения в минимум максимума абсолютного значения отклонения аппроксимирующей функции от заданной

$$E_n = \max |g(x, a_i) - f(x)| \rightarrow \min. \quad (3.9)$$

Если $g(x, a_i)$ является полиномом или рациональной дробью с n -параметрами — коэффициентами, то доказываем, что приближение по Чебышеву достигается при равенстве всех максимальных отклонений от заданной функции в рассматриваемом промежутке и на границах промежутка [5].

Чебышевское приближение, следовательно, обеспечивает равноволновое приближение, которое является весьма желательным во многих практических задачах.

К сожалению, нахождение функций $g(x, a_i)$ из условия (3.9) приводит к трудно разрешимым аналитически даже в простых случаях системам нелинейных уравнений относительно a_i .

Найдены решения для полинома и рациональных функций, наименее уклоняющихся от нуля, которые называются полиномами Чебышева и дробями Золотарева. Рассмотрим кратко первую из этих функций — полиномы Чебышева.

Полиномами Чебышева степени n называют выражения вида

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & 0 \leq x \leq 1; \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} x) & x > 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Используя формулы косинусов кратных дуг, нетрудно убедиться, что функция T_n является полиномом — четным при n четных и нечетным — при n нечетных. Для нее справедлива следующая рекуррентная формула:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \quad (3.11)$$

Найдя полиномы для $n=0$ и $n=1$ и применяя формулу (3.11) для остальных n , имеем:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos 0 = 1; \\ T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x; \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1; \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x; \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1; \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned} \quad (3.12)$$

На рис. 3.1 приведены графики полиномов Чебышева. Кривые — графики полиномов, как видим, в промежутке $-1 \leq x \leq 1$ колеблются между $+1$ и -1 ; все максимумы кривой равны $+1$ и все минимумы равны -1 : наибольшие значения их модулей в основном интервале одинаковы и равны единице. На границах промежутка получаем эти же значения: $T_n(+1) = 1$; $T_n(-1) = (-1)^n$. Число максимумов модуля, включая граничные значения, равно $n+1$.

Вне интервала с ростом $|x|$ значения полинома изменяются монотонно: при $x > 1$ растут; при $x < -1$ растут для четных n и убывают для n нечетных.

В математике доказывается, что из всех полиномов $g(x, a_i)$ степени n полином $2^{n-1}T_n(x)$ с коэффициентом при x^n , равным единице, наименее отклоняется от нуля в промежутке $-1 \leq x \leq +1$,

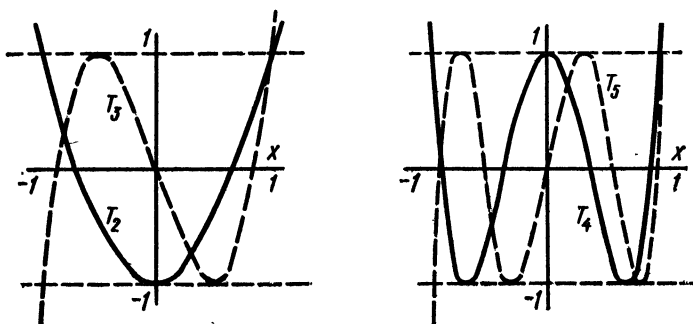


Рис. 3.1

т. е. максимум модуля полинома $\max |g(x, a_i)|$ принимает наименьшее значение.

С помощью полиномов Чебышева можно получить равномерную аппроксимацию постоянной величины (единицы) в интервале $-1 \leq \omega \leq 1$, которой представляется полоса пропускания идеального фильтра нижних частот.

§ 3.2. Об аппроксимации частотных и временных характеристик

При заданной допустимой погрешности аппроксимация должна обеспечивать получение функции передачи цепи заданного класса и вида по возможности минимального порядка. Для этого необходимо, во-первых, определять все параметры аппроксимирующей функции из условия обращения в минимум ошибки приближения и, во-вторых, применять критерии наилучших приближений — среднеквадратического или Чебышевского. Выбор критерия приближения зависит также от требований к характеру приближения, предъявляемого поставленной задачей синтеза, и возможности нахождения решения задачи аппроксимации.

Критерий Чебышева обеспечивает наименьший порядок функции цепи, но процесс нахождения решения по нему намного сложнее, чем по другим методам приближения.

В синтезе цепей по заданной частотной характеристике — амплитудной или фазовой — аппроксимирующая функция, как было показано во введении, является вещественной рациональной дробью. Лишь в частном случае она принимает вид полинома.

Для получения функции передачи аппроксимирующая функция должна быть определена в интервале $0 \leq \omega \leq \infty$. При этом точность приближения на разных участках интервала приближения может быть различной.

Наряду с обеспечением требуемой точности аппроксимация должна гарантировать выполнение условия физической реализуемости. Для амплитудной характеристики условие реализуемости, как следует из § В.3, состоит в следующем: квадрат модуля должен быть отношением двух четных полиномов с вещественными коэффициентами; оба полинома не принимают отрицательных значений при $0 \leq \omega \leq \infty$; степень числителя не превышает степени знаменателя.

Лишь в самых простых случаях удастся получить решение задачи наилучшего приближения частотных характеристик в аналитическом виде. В общем случае произвольных характеристик, подлежащих аппроксимации, получить аналитическое решение невозможно.

В общем случае наилучшие в среднеквадратическом или Чебышевском смысле приближения с помощью рациональных дробей можно получить лишь в численном виде при использовании электронных вычислительных машин. В настоящее время имеются разработанные программы для решения большого числа типичных задач аппроксимации по заданным частотным характеристикам [10].

Аппроксимация в синтезе по временным характеристикам может производиться как во временной, так и комплексной частотной области.

При аппроксимации во временной области можно непосредственно оценивать отклонение аппроксимирующей функции времени от заданной, а также предписывать характер приближения в смысле того или иного критерия. В этом состоит достоинство аппроксимации во временной области.

Но с другой стороны, аппроксимирующая функция во временной области, представляющая импульсную характеристику синтезируемой цепи, имеет сложный вид.

Как оригинал дробно-рациональной функции передачи импульсная характеристика, в соответствии с теоремой разложения преобразования Лапласа, выражается суммой затухающих по экспоненте синусоидальных функций:

$$h(t) = \sum e^{-\sigma_k t} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t). \quad (3.13)$$

При наличии кратных полюсов у соответствующих слагаемых появятся множители в виде степеней t . Если полюс располагается на вещественной оси, то $\omega_k = 0$ и слагаемое будет затухающей вещественной экспонентой.

Условие физической реализуемости функции передачи состоит в положительности σ_k .

Аппроксимирующая функция (3.13) имеет сложный трансцендентный вид. Определение ее параметров A_k , B_k , ω_k и σ_k по критериям наилучших приближений возможно только в численном виде на ЭВМ. При этом решение задачи удобно производить с помощью итерационного процесса, т. е. последовательного улучшения точности, начиная от предварительно найденного тем

или иным способом нулевого приближения. Нахождение подходящего нулевого приближения имеет поэтому большое значение.

При аппроксимации в комплексной частотной области аппроксимирующей функцией является дробно-рациональная функция комплексной частоты. Возможность приближения в частотной области в синтезе по временным характеристикам следует из того, что ошибки во временной и частотной областях

$$L[\varepsilon(t)] = L[g(t) - f(t)] = G(s) - F(s) = E(s) \quad (3.14)$$

связаны по формуле (теореме) Релея

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.15)$$

Следовательно, малой ошибке в частотной области соответствует малая ошибка во временной области.

При интегральном преобразовании ошибки из частотной во временную область характер ее меняется (за исключением среднеквадратической ошибки). Поэтому при использовании аппроксимации в частотной области соответствующее приближение во временной области не будет удовлетворять критериям наилучших приближений. Указанное обстоятельство во многих практических задачах не является существенным, особенно если аппроксимация рассматривается как нулевое приближение для дальнейшего численного уточнения. Следует иметь в виду, что в синтезе мы получаем цепь из идеальных элементов без учета паразитных параметров. Практически значения элементов лежат в пределах определенных допусков, т. е. отличаются от расчетных. Поэтому действительные характеристики цепи будут отличаться от рассчитанных по строгим критериям.

При аппроксимации в частотной области требуется преобразование частотной погрешности в погрешность во временной области: именно ее значение предписывается в синтезе по временной характеристике.

Но с другой стороны, при преобразовании задачи в частотную область существенно упрощается вид аппроксимирующей функции и сама проблема аппроксимации. При этом удается получать функции передачи часто требуемых цепей определенных видов и конфигураций. В этом состоит важнейшее достоинство аппроксимации в частотной области.

§ 3.3. Методы аппроксимации временных характеристик

Приведем два простых, но достаточно эффективных метода аппроксимации временных характеристик: метод, основанный на применении рядов Фурье и метод интерполяции в комплексной частотной области с выбором узлов в нулях вещественного и мнимого спектров.

Применение рядов Фурье

Существует ряд методов аппроксимации временных характеристик с использованием рядов Фурье. Рассмотрим один из них, позволяющий получать физически реализуемые функции передачи.

Заданная аperiodическая функция времени в виде импульса длительностью τ периодически (при $t > 0$) продолжается с обращением знака в виде функции $f_n(t)$ с периодом $T = 2\tau$ (рис. 3.2, а). Исходный импульс можно получить, если к периодической функции $f_n(t)$ добавить ту же функцию, но смещенную на время, равное полупериоду $0,5T = \tau$ (рис. 3.2. б):

$$f(t) = f_n(t) + f_n(t - \tau). \quad (3.16)$$

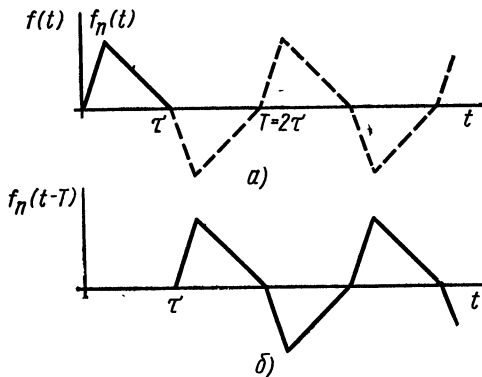


Рис. 3.2

Соответственное равенство в преобразованной частотной области при использовании теоремы запаздывания запишется как

$$F(s) = F_n(s) (1 + e^{-s\tau}). \quad (3.17)$$

Здесь $F_n(s)$ — изображение периодической функции.

Суть аппроксимации состоит в том, что оба

множителя в этом выражении представляются дробно-рациональными приближениями.

Приближение первого множителя можно получить, если f_n представить частной суммой ее разложения в ряд Фурье. Так как рассматриваемая периодическая функция обладает симметрией вида $f_n(t) = -f_n(t + T/2)$, то ряд будет состоять только из нечетных гармоник.

Изображение нечетного тригонометрического полинома степени $2m - 1$, представляющего частную сумму ряда, имеет вид

$$G_1(s) = \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{A(s)}{\sum_{k=1}^m [s^2 + (2k-1)^2 (\pi/\tau)^2]}. \quad (3.18)$$

Это выражение принимается в качестве приближения множителя $F_n(s)$.

Величину, обратную второму множителю (3.17), представим в виде ряда, получаемого делением числителя на знаменатель:

$$\frac{1}{1 + e^{-s\tau}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-ks\tau} = 0,5 [1 + L(s)]. \quad (3.19)$$

В этом выражении

$$L(s) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-ks\tau}. \quad (3.20)$$

Согласно теореме запаздывания этому изображению соответствует оригинал

$$l(t) = \delta(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \delta(t - k\tau), \quad (3.21)$$

где $\delta(t)$ — единичная импульсная функция.

График этой функции, представляющей последовательность импульсов, показан на рис. 3.3, а; интегралом ее являются прямоугольные колебания (рис. 3.3, б).

Приближенное представление (3.21) в виде тригонометрического полинома степени $n \geq m$ можно получить, взяв за основу ряд Фурье для разрывных прямоугольных колебаний. В окрестности точек разрыва разлагаемой функции, как известно, равномерная сходимость частной суммы ряда Фурье нарушается (явление Гиббса). Для обеспечения равномерной сходимости применяют различные виды суммирования, сводящиеся к корректировке коэффициентов ряда.

Если принять одну из возможных корректировок коэффициентов ряда для прямоугольных колебаний, а затем продифференцировать этот ряд, то получается следующий тригонометрический полином, приближенно представляющий (3.21):

$$l(t) \approx \sum_{k=1}^n C_k \cos(2k-1)\pi t/\tau, \quad (3.22)$$

где $C_k = \frac{4}{\tau} [(2k-1)\pi/2n] \sin(2k-1)\pi/2n > 0$ принята с учетом указанной корректировки.

Изображение (3.22)

$$L(s) \approx \sum_{k=1}^n \frac{C_k s}{s^2 + [(2k-1)\pi/\tau]^2} = \frac{P(s)}{D(s)Q(s)}, \quad (3.23)$$

где $Q(s) = \prod_{k=m+1}^n [s^2 + (2k-1)^2 \pi^2/\tau^2]$.

Как сумма элементарных реактансных функций ($C_k > 0$) дробь (3.23) является также реактансной функцией.

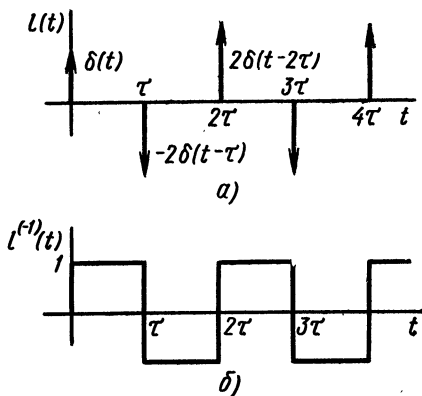


Рис. 3.3

Приближенное выражение второго трансцендентного множителя в (3.17) получит вид

$$1 + e^{-s\tau} = \frac{2}{1+L(s)} \approx \frac{2D(s)Q(s)}{Q(s)D(s)+P(s)}. \quad (3.24)$$

Дробь, аппроксимирующая (3.17), с учетом (3.18) и (3.24) получит вид

$$G(s) = \frac{2A(s)Q(s)}{Q(s)D(s)+P(s)}. \quad (3.25)$$

Знаменатель здесь является полиномом Гурвица, поскольку отношение его четной и нечетной частей является реактансной функцией.

Погрешность приближения обусловлена погрешностью частной суммы ряда Фурье с изображением (3.18) и погрешностью представления (3.22) последовательности импульсов тригонометрическим полиномом. Результирующую погрешность можно получить сверткой указанных двух погрешностей, так как согласно (3.25) в частотной области приближенные представления перемножаются.

Метод интерполяции в комплексной частотной области

Для того чтобы заданную в качестве импульсной характеристики функцию времени можно было аппроксимировать функциями вида (3.13) и тем самым решить поставленную задачу синтеза, функция должна равняться нулю при $t < 0$; быть однозначной ограниченной при $t > 0$ и обращаться в нуль при $t \rightarrow \infty$. Указанную функцию $f(t)$, обращающуюся в нуль при $t \rightarrow \infty$, можно приближенно принимать за функцию импульсного вида с конечной длительностью τ , которая тождественно равна нулю при $t > \tau$.

Если под интегралом прямого преобразования Лапласа представить экспоненту в виде ряда

$$e^{-st} = 1 - st + \frac{1}{2!} (st)^2 - \dots,$$

то изображение $f(t)$ можно получить почленным интегрированием

$$F(s) = \int_0^{\tau} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\tau} f(t) dt - s \int_0^{\tau} t f(t) dt + \frac{s^2}{2!} \int_0^{\tau} t^2 f(t) dt - \dots \quad (3.26)$$

В силу конечности τ изображение представлено в виде сходящегося всюду степенного ряда от s . Следовательно, изображение функций импульсного вида является целой трансцендентной функцией, аналитической во всей плоскости s (не имеет полюсов).

При $s = j\omega$ вещественная и мнимая составляющие спектра, а также модуль являются также целыми трансцендентными функциями вещественной частоты:

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.27)$$

Обозначим нули вещественной части через α_k , мнимой части β_k , а совпавшие значения $\alpha_i = \beta_i$, образующие нули $F(j\omega)$, через γ_i . Число указанных нулей будет бесконечным.

Для получения функции передачи конечного порядка будем учитывать только конечное число нулей, лежащих в полосе существенной части спектра, которая в основном определяет функцию времени. Ширина этой полосы зависит от вида временной функции: для более гладкой функции полоса существенной части спектра уже и, наоборот.

Для видеоимпульсов указанная полоса располагается в области низких частот, для радиоимпульсов — в области, прилегающей к частоте заполнения. Чем выше требуемая точность к приближению, тем шире должна быть полоса частот, в которой располагаются учитываемые нули вещественной и мнимой частей спектра.

Суть излагаемого метода аппроксимации состоит в том, что в качестве нулей аппроксимирующей дроби, образующих ее числитель, принимаются нули γ_i , лежащие в принятой полосе, а в качестве нулей четной и нечетной частот знаменателя соответственно нули α_k и β_k — в случае четного числа конечных нулей числителя и нули β_k и α_k — в случае нечетного числа нулей.

Достаточно рассмотреть первый случай, когда принимается в качестве числителя

$$M(s) = A_1 \prod_{i=\mu_1}^{\mu_2} (s^2 + \gamma_i^2); \quad (3.28)$$

и в качестве четной и нечетной частей знаменателя:

$$N_2(s) = \prod_{k=\nu_1}^{\nu_2} (s^2 + \alpha_k^2); \quad (3.29)$$

$$sN_1(s) = A_2 s \prod_{k=\nu_1}^{\nu_2} (s^2 + \beta_k^2).$$

При $s = j\omega$ $M(s) = M(-\omega^2)$; $N_2(s) = N_2(-\omega^2)$ вещественны, а $sN_1(s) = j\omega N_1(-\omega^2)$ — мнима. Поэтому аппроксимирующая дробь

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{N_2(s) + sN_1(s)} \quad (3.30)$$

при $s = j\omega$ имеет составляющие:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[G(j\omega)] &= \frac{N_2(-\omega^2) M(-\omega^2)}{N_2^2 + \omega^2 N_1^2}; \\ \operatorname{Im}[G(j\omega)] &= \frac{\omega N_1(-\omega^2) M(-\omega^2)}{N_2^2 + \omega^2 N_1^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Как видим, принятие условий (3.28) и (3.29) соответствует приравнению нулей вещественной и мнимой частей аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в полосе существенной части спектра. Приближение здесь состоит в том, что из бесконеч-

ного числа нулей составляющих спектра учитывается конечное число нулей, лежащее в полосе существенной части спектра, а остальные нули отбрасываются.

В выражениях (3.28) и (3.29) не найдены еще коэффициенты A_1 и A_2 , которые определяют уровни вещественной и мнимой частей аппроксимирующей дроби. Простейший и вполне удовлетворительный способ состоит в приравнении аппроксимирующей и аппроксимируемой функций при нескольких значениях частоты ω_i в области наибольших значений вещественного и мнимого спектров. Удобно частоты ω_i принимать равными нулям α_i и β_i вещественной и мнимой частей, для которых приравнение (3.27) и (3.30) дает

$$A_{1i} = P(\beta_i) \frac{N_2(\beta_i)}{M(\beta_i)}; \quad A_{2i} = -A_{1i} \frac{M(\alpha_i)}{\alpha_i Q(\alpha_i) N_1(\alpha_i)}. \quad (3.32)$$

Для каждого индекса i получим свои значения A_{1i} и A_{2i} . В качестве расчетного значения следует принять средневзвешенное из значений, найденных для ряда частот:

$$A_1 = \frac{\sum_i A_{1i} |P_i|}{\sum_i |P_i|}; \quad A_2 = \frac{\sum_i A_{2i} |Q_i|}{\sum_i |Q_i|}. \quad (3.33)$$

Сходимость рассматриваемой аппроксимации следует из того, что при $n \rightarrow \infty$ составляющие аппроксимирующей функции (3.31) переходят в сходящиеся разложения целых функций — вещественного и мнимого спектров в бесконечные произведения.

Аппроксимирующая функция вида (3.30) удовлетворяет ограничениям на функции передачи реактивного четырехполюсника лестничной структуры с нагрузкой в виде активного сопротивления, если выполнено условие: нули вещественного и мнимого спектра лежат на оси ω и взаимно чередуются. Существует обширный класс функций времени импульсного характера, спектры которых удовлетворяют этому условию. К нему, в частности, относятся импульсы, обладающие симметрией относительно средней линии, а также ряд импульсов несимметричной формы.

Достоинство метода состоит в его простоте и возможности в ряде случаев записи выражения аппроксимирующей дроби в общем виде для любого порядка. При этом почти всегда удастся оценить по виду дроби, а также по ширине существенной части спектра, нужный порядок дроби.

Рассмотрим пример аппроксимации импульса в виде квадрата полупериода синусоиды длительностью $\tau = \pi$:

$$f(t) = \begin{cases} \sin^2 t & 0 < t < \tau = \pi; \\ 0 & t > \pi. \end{cases}$$

Изображение периодически продолженной (при $t > 0$) функции

$$F_1(s) = L\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t\right) = \frac{2}{s(s^2 + 4)}.$$

Импульс в виде квадрата полупериода синусоиды получится, если вычесть из периодической функции такую же функцию, но смещенную на время $\tau = \pi$. Поэтому искомое изображение заданного импульса согласно теореме смещения в вещественной области

$$F(s) = F_1(s) - F_1(s) e^{-s\pi} = \frac{2}{s(s^2 + 4)} (1 - e^{-s\pi}).$$

Вынеся за скобку $\exp(-s\pi/2)$, имеем

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{4}{s(s^2 + 4)} e^{-s\pi/2} \operatorname{sh}(s\pi/2) = \\ &= \frac{4}{s(s^2 + 4)} \operatorname{sh}(s\pi/2) [\operatorname{ch}(s\pi/2) - \operatorname{sh}(s\pi/2)]. \end{aligned}$$

При $s = j\omega$,

$$F(j\omega) = \frac{4 \sin(s\pi/2)}{\omega(4 - \omega^2)} [\cos(\omega\pi/2) - j \sin(\omega\pi/2)].$$

Нулями $F(j\omega)$ являются нули синуса, лежащие на оси ω
 $(\omega_i\pi/2) = \pm i\pi; \omega_i = \pm 2i \ (i = 0, 1, 2 \dots)$.

Нулями вещественной и мнимой частей дополнительно являются нули косинуса и синуса:

$$\omega_k = \pm (2k + 1); \omega_k = \pm 2k \ (k = 0, 1, 2 \dots).$$

На основании (3.28) можем сразу написать числитель аппроксимирующей дроби

$$M(s) = A_1 \prod_{i=2}^n (s^2 + 4i^2).$$

Здесь нули $s=0$ и $s^2 = -4$ сократились с нулями множителей знаменателя, что является обязательным для обеспечения ограниченности спектров.

На основании (3.29) записываем четную и нечетную части знаменателя дроби:

$$N_2(s) = \prod_{k=1}^n [s^2 + (2k + 1)^2];$$

$$A_2 s N_1(s) = A_2 s \prod_{k=1}^n (s^2 + 4k^2).$$

При $n=1$ получим дробь минимально возможного порядка, так как еще обеспечивается сокращение множителей в знаменателе. Согласно (3.30)

$$G(s) = \frac{A_1}{(s^2 + 1)(s^2 + 9) + A_2 s (s^2 + 4)}.$$

Для определения $A_{1,2}$ примем $\omega_0 = 1$ и $\omega_1 = 1$. При $\omega_0 = 0$ $P(0) = \pi/2; Q(0) = 0$. При $\omega_1 = 1$ $P(1) = 0; Q(1) = -4/3$. Согласно (3.32)

$$A_1 = 4,5\pi; \quad A_2 = 1,12\pi.$$

Аппроксимирующая функция принимает вид

$$G(s) = \frac{4,5\pi}{(s^2 + 1)(s^2 + 9) + 1,12\pi s(s^2 + 4)}.$$

Вычисления показывают [11], что отклонение оригинала этого изображения не превышает 5% от заданной функции.

§ 3.4. Синтез полиномиальных частотных фильтров

Электрические фильтры относятся к широко распространенному очень важному классу частотно-избирательных цепей.

Расчет электрических фильтров по методу характеристических параметров, который рассматривается в анализе цепей, имеет тот недостаток, что согласование сопротивления реальной нагрузки и характеристического сопротивления фильтра в широкой полосе частот невозможно. Невыполнение основной предпосылки метода приводит к расхождению между действительными и расчетными характеристиками фильтра.

Рассмотрим расчет фильтров на основе метода синтеза, который не имеет указанного недостатка. Ограничимся случаем простейшего фильтра полиномиального вида, функция передачи которого не имеет конечных нулей — все нули находятся в бесконечности: числитель ее является постоянной величиной, а знаменатель — полиномом степени n

$$H(s) = \frac{a_0}{N(s)} = \frac{a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1}. \quad (3.34)$$

Коэффициенты функции передачи должны быть определены из аппроксимации с помощью ее модуля при $s = j\omega$ заданной амплитудно-частотной характеристики фильтра.

В качестве желательной нормированной частотной характеристики идеального фильтра нижних частот, подлежащей аппроксимации, принимается следующая функция:

$$|H_0(j\omega)| = \begin{cases} 1 & 0 < |\omega| < 1; \\ 0 & |\omega| > 1. \end{cases} \quad (3.35)$$

Принята нормированная частота среза $\omega_c = 1$. В полосе пропускания модуль должен иметь постоянное единичное значение (нулевое затухание), а в полосе задержки — нулевое значение (бесконечное затухание); при граничной частоте $\omega = \omega_c$ получается скачок модуля.

Так как характеристику (3.35) невозможно получить с помощью цепи из конечного числа сосредоточенных элементов с функцией передачи вида (3.34), то речь должна идти только о приближенном ее воспроизведении.

Аппроксимация заданной характеристики (3.35) должна производиться с помощью квадрата модуля функции передачи при $s = j\omega$, который согласно (В.15) имеет вид

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{1 + B_1\omega^2 + \dots + B_{n-1}\omega^{2(n-1)} + B_n\omega^{2n}}. \quad (3.36)$$

Входящие в эту аппроксимирующую функцию коэффициенты нужно определить из условия приближения заданной идеальной характеристики (3.35).

Рассмотрим приближение с помощью рядов Тэйлора, дающее фильтры Баттерворса, и приближение с помощью полиномов Чебышева, дающее Чебышевские фильтры.

Фильтры Баттерворса

При аппроксимации с помощью рядов Тэйлора разлагаются в степенные ряды в окрестности выбранной точки как аппроксимируемая, так и аппроксимирующая функции и приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях обоих разложений определяются искомые величины B_k . Для определения n неизвестных B_k необходимо иметь n равенств.

Выберем в качестве начальной точки разложения точку $\omega = 0$.

При $\omega = 0$ значение аппроксимируемой функции $H_0^2 = 1$, а все ее производные равны нулю $H_0^2(0) = 0$, так что ряд будет состоять из одного члена нулевой степени; коэффициенты при всех остальных степенях ω равны нулю.

Аппроксимирующую функцию (3.36) проще всего разложить в ряд Маклорена делением числителя на знаменатель. В результате деления получим

$$|H(j\omega)|^2 = a_0^2 \{1 - B_1\omega^2 + (B_1^2 - B_2)\omega^4 - [B_1(B_1^2 - 2B_2) + B_3]\omega^6 + \dots\}.$$

Приравняв первый коэффициент разложения значению $H_0^2(0) = 1$, а остальные $n - 1$ коэффициентов нулю, получим

$$a_0 = 1; B_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (3.37)$$

Все искомые коэффициенты знаменателя (3.36), кроме B_n , оказываются равными нулю.

Аппроксимирующая функция — квадрат модуля функции передачи фильтра получает вид

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + B_n\omega^{2n}}.$$

Примем условно, что при частоте среза $\omega = \omega_c = 1$ модуль уменьшается в $\sqrt{2}$ раза, а квадрат модуля — в два раза. Тогда $B_n = 1$ и аппроксимирующая функция

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}. \quad (3.38)$$

На рис. 3.4 показаны графики этой функции при различных значениях n . Все кривые спадают монотонно с ростом частоты от единицы ($\omega=0$) до нуля ($\omega=\infty$), проходя через точку $1/\sqrt{2}$ ($\omega=1$). Чем выше n , тем лучше приближение.

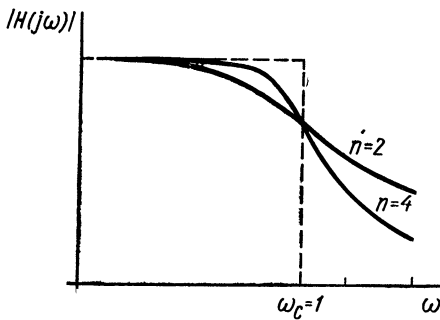


Рис. 3.4

Наилучшее приближение получается в окрестности нулевой частоты — здесь кривые имеют плоский вид — постоянное значение. Поэтому характеристики фильтров Баттерворса называют максимально плоскими.

Теперь по известному значению квадрата модуля необходимо найти выражение

функции передачи. Согласно § В.17 получим, положив в (3.38) $\omega = s/j$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}. \quad (3.39)$$

Найдем полюсы, которые удовлетворяют уравнению

$$(-1)^n s^{2n} + 1 = 0.$$

Модули полюсов равны единице, поэтому для нечетных n получаем

$$s_k = 1^{1/2n} = e^{jk\pi/n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n);$$

для четных n

$$s_k = (-1)^{1/2n} = e^{j(2k+1)\pi/2n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

На рис. 3.5, а, б показано расположение полюсов для случаев $n=3$ и $n=4$. Полюсы равномерно распределены по окружности единичного радиуса.

В соответствии с § В.3, в качестве полюсов искомой функции передачи $H(s)$ следует принять полюса, лежащие в левой полуплоскости, число и значения которых полностью определяются выбранным n .

Приведем полиномы Баттерворса, образующие знаменатель $H(s)$ и полученные перемножением двучленов $s - s_k$ для трех значений n :

$$\begin{aligned} n=1 &: s + 1; \\ n=2 &: s^2 + \sqrt{2}s + 1; \\ n=3 &: s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = (s + 1)(s^2 + s + 1). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Выбор значения n , определяющего порядок функции передачи, производится по условию обеспечения требуемой крутизны спада модуля функции передачи или крутизны затухания вблизи гра-

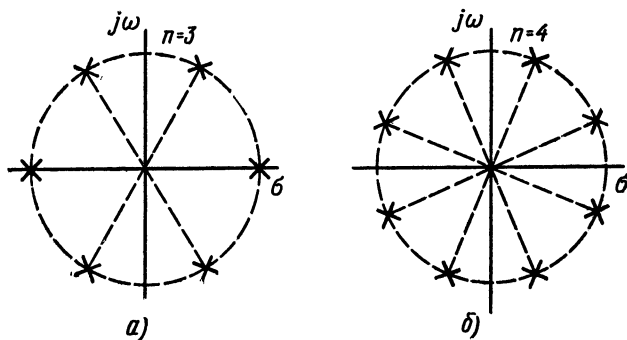


Рис. 3.5

ничной частоты, которая обычно задается величиной затухания при $\omega = 2\omega_c = 2$. Если $n > 1$, то на этой частоте модуль

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \approx \frac{1}{\omega^n}. \quad (3.41)$$

Отсюда при оценке нужного значения n можно пользоваться формулой

$$n = 20 \lg |U_1/U_2| / 20 \lg \omega. \quad (3.42)$$

Если требуется при $\omega = 2$ иметь затухание 17 дБ, то

$$n = (17/20 \lg 2) \approx 2,83.$$

Приняв $n = 3$ согласно (3.40), получим функцию передачи

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Чебышевские фильтры

Недостаток фильтров Баттерворса состоит в том, что ошибка неравномерна в полосе пропускания — равна нулю только в одной точке $\omega = 0$, а затем монотонно растет до максимума на границе. Кроме того, быстрота спада модуля функции передачи вне полосы пропускания получается недостаточной.

Применение полиномов Чебышева позволяет получить равномерное (равноволновое) распределение ошибки в полосе пропускания и более быстрый спад модуля вне полосы. При синтезе фильтров с использованием полиномов Чебышева в качестве аппроксимирующей функции рассматривают четный полином, обратный квадрату модуля (3.36) функции передачи. Соответственно, аппроксимируемая функция, обратная (3.35), равна единице в полосе пропускания и бесконечности — в полосе задержки. При-

мается, что отклонение между указанными функциями при нормированной частоте среза $\omega_c=1$ является четным полиномом Чебышева:

$$\frac{1}{|H(j\omega)|^2} - 1 = \frac{\varepsilon^2}{2} T_{2n}(\omega) = \frac{\varepsilon^2}{2} [2T_n^2(\omega) - 1]. \quad (3.43)$$

Здесь $\varepsilon^2/2$ равно максимальному отклонению квадрата модуля от единицы.

Выражение в квадратных скобках получено на основе соотношения $\cos 2n\alpha = 2\cos^2 n\alpha - 1$ при $\alpha = \arccos \omega$. Из (3.43) для квадрата модуля при пренебрежении $\varepsilon^2/2$ по сравнению с единицей имеем

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon^2 T_n^2} \approx \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2}. \quad (3.44)$$

Полученное выражение дает аппроксимацию единицы, мало отличающуюся от равноволновой в полосе пропускания.

На рис. 3.6 показаны графики изменения модуля при $n=4$ и $n=5$. Как видно, при n нечетных кривая начинается с максимума, равного единице и соответствующего нулевому значению T_n , а при n четных — с минимума, равного $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ и соответствующего единичному значению T_n .

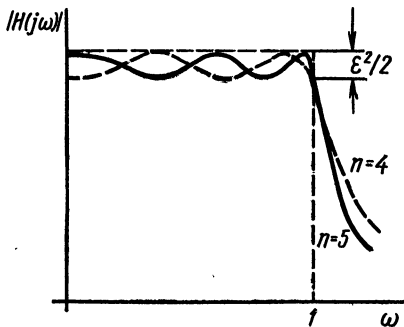


Рис. 3.6

Размах пульсаций, т. е. отклонения модуля от единицы, в полосе пропускания равен

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (3.45)$$

Вне полосы пропускания модуль функции передачи монотонно падает. При $\omega > 1$ и $\varepsilon^2 T_n^2(\omega) \gg 1$ модуль (3.44) можно оценивать согласно (3.10) по выражению

$$|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\varepsilon T_n(\omega)} = \frac{1}{\varepsilon \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} \omega)}. \quad (3.46)$$

Чем больше допустимая пульсация в полосе пропускания и чем выше порядок полинома Чебышева, тем быстрее падает модуль вне полосы пропускания. При заданном ε и заданной крутизне спада нужный порядок полинома и, следовательно, функции передачи определяется однозначно.

Пусть размах допустимых пульсаций в полосе пропускания составляет 0,2, так что $\varepsilon^2=0,2$, и требуемое затухание при

$\omega = 2\omega_c = 2$ составляет 20 дБ, т. е. $|H(j\omega)| = 0,1$. Тогда согласно (3.46) имеем

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\varepsilon T_n} = \frac{1}{\sqrt{0,2} \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} 2)} = 0,1.$$

Используя таблицы гиперболических функций, из равенства

$$\operatorname{ch}(n \operatorname{Arch} 2) = \operatorname{ch}(1,32n) = 1/0,1 \sqrt{0,2} = 22,4$$

получаем $1,32 n = 3,11$ и $n = 2,4$. Следовательно, требуется Чебышевский фильтр с $n = 3$.

Сравнение этого примера с аналогичным примером для фильтра Баттерворса показывает, что у фильтров Чебышева крутизна характеристики за частотой среза значительно больше.

Перейдем к определению функции передачи, т. е. полюсов, лежащих в левой полуплоскости.

Полюса согласно (3.44) должны удовлетворять уравнению

$$1 + \varepsilon^2 T_n^2(s_k/j) = 0; \quad T_n(s_k/j) = \cos n[\arccos(s_k/j)] = \pm j/\varepsilon. \quad (3.47)$$

Обозначим комплексные величины:

$$\begin{aligned} \arccos(s_k/j) &= u_k + jv_k; \\ s_k &= \sigma_k + j\omega_k = j \cos(u_k + jv_k). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Тогда с учетом (3.47) имеем

$$T_n(s_k/j) = \cos(nu_k + jnv_k) = \cos nu_k \operatorname{ch} nv_k - j \sin nu_k \operatorname{sh} nv_k = \pm j/\varepsilon. \quad (3.49)$$

Отсюда для определения u_k и v_k , через которые выражен искомый полюс, получим уравнения:

$$\begin{aligned} \cos nu_k \operatorname{ch} nv_k &= 0; \\ \sin nu_k \operatorname{sh} nv_k &= \pm 1/\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{ch} nv_k \geq 1$, то в первом уравнении $\cos nu_k = 0$, так что

$$u_k = (2k + 1) \pi/2n \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n). \quad (3.50)$$

Во втором уравнении $\sin nu_k = \sin(2k + 1) \pi/2 = \pm 1$, поэтому

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{Arsh}(1/\varepsilon); \quad (3.51)$$

значение v_k зависит только от ε .

Согласно (3.48) и учете разложения (3.49) при $n = 1$ вещественная и мнимая части полюсов равны:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \operatorname{sh} v_k \sin u_k, \\ \omega_k &= \operatorname{ch} v_k \cos u_k. \end{aligned} \quad (3.52)$$

При учете (3.50) выражения для составляющих полюсов, лежащих в левой полуплоскости, получают вид

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -\operatorname{sh} v_k \sin(2k + 1) \pi/2n; \\ \omega_k &= \operatorname{ch} v_k \cos(2k + 1) \pi/2n \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Значение v_k при заданных ε и n определяется из выражения (3.51).

Если оба равенства (3.52) возвести в квадрат и сложить, то получим

$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{sh}^2 v_k} + \frac{\omega_k^2}{\operatorname{ch}^2 v_k} = 1. \quad (3.54)$$

Следовательно, полюса функции передачи лежат на эллипсе с полуосями $\operatorname{sh} v$ и $\operatorname{ch} v$. На рис. 3.7 показан эллипс в случае, когда отношение полуосей равно двум и $n=4$.

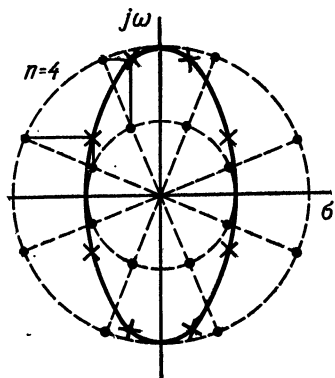


Рис. 3.7

Из сравнения выражений (3.53) и (3.40) для фильтров Баттерворса можно получить следующее правило для нахождения расположения полюсов на эллипсе. Наносятся две концентрические окружности с радиусами, равными полуосям, на которых отмечаются точки пересечения с радиальными линиями, проведенными под углами (3.50). Полюс, лежащий на эллипсе, находится на пересечении горизонтальной и вертикальной линий, проведенных соответственно от точек на большой и малой окружностях.

§ 3.5. Синтез цепи задержки

Цепи, служащие для задержания на заданное время электрических сигналов, используются в различных областях применения импульсных сигналов.

Основное требование, предъявляемое к цепям задержки, состоит в обеспечении заданного времени задержки при минимальном искажении формы импульса.

Существуют цепи задержки с распределенными параметрами и сосредоточенными параметрами. Мы будем рассматривать простейшие цепи задержки, составленные из сосредоточенных реактивных элементов, функции передачи которых не имеют конечных нулей.

Импульсная и переходная характеристики идеальной цепи задержки представляют соответственно смещенные на время задержки импульсную и ступенчатые функции (рис. 3.8, а). Такие характеристики не воспроизводимы цепью с конечным числом сосредоточенных элементов. Последняя всегда искажает форму импульса — импульсная характеристика имеет конечную ширину, сопровождаемую колебаниями; соответственно переходная характеристика имеет конечное время нарастания с колебаниями после установления фронта.

Из существующих различных методов аппроксимации мы используем метод интерполяции в комплексной частотной области.

При расчетах цепей задержки с конечным числом элементов целесообразно с самого начала задаваться импульсной характеристикой с конечной длительностью. Выбранная форма импульсной характеристики должна:

1) обеспечивать монотонное нарастание переходной характеристики;

2) иметь производные возможно более высокого порядка, что приводит к меньшей ширине существенной части спектра и снижает требуемый порядок аппроксимирующей функции;

3) иметь простейшее изображение по Лапласу, чтобы облегчить процесс аппроксимации в комплексной частотной области.

Указанным требованиям во многом удовлетворяет функция в виде квадрата полупериода синусоиды. Если $\beta = 2\pi/T$ угловая частота, а T — период, то при выборе амплитуды при $\sin^2 \beta t$ $A = 4/T$ площадь, ограниченная кривой квадрата полупериода синусоиды, будет равна единице.

Амплитуда $A = 4/T$ представляет максимальную скорость нарастания фронта переходной характеристики. Если за длительность этого фронта $\tau_{\text{ср}}$ условно принять время, в течение которого переходная характеристика нарастает от нуля до единицы с максимальной скоростью $4/T$, то

$$\tau_{\phi}(4/T) = 1; \quad \tau_{\phi} = T/4. \quad (3.55)$$

Длительность фронта равна половине длительности принятого полупериода синусоиды.

В качестве импульсной характеристики цепи задержки примем функцию в виде смещенного на время τ квадрата полупериода синусоиды (рис. 3.8, б)

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \tau; \\ (4/T) \sin^2 \beta (t - \tau) & 0 < t - \tau < T/2; \\ 0 & t - \tau > T/2 \end{cases} \quad (3.56)$$

Переходную характеристику получим, проинтегрировав принятую импульсную характеристику (рис. 3.8, а).

Введем нормировку, приняв интервал от 0 до максимума импульсной характеристики, представляющее время задержки, равным

$$\tau_3 = \tau + (T/4) = \pi/2. \quad (3.57)$$

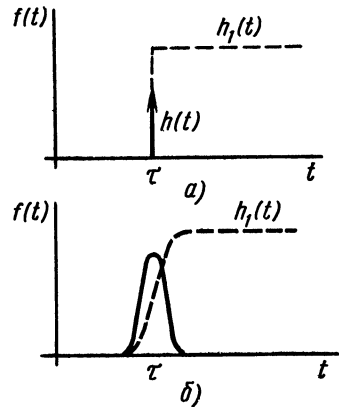


Рис. 3.8

Заданное отношение времени задержки к длительности фронта

$$\frac{\tau_z}{\tau_\phi} = 1 + 4\tau/T. \quad (3.58)$$

Чтобы применить аппроксимацию в комплексной частотной области, запишем изображение (3.56), разбив процесс записи на несколько последовательных этапов.

Изображение периодической (при $t > 0$) функции в виде квадрата синусоиды с угловой частотой π/τ_1 , где $\tau_1 = 0,5 T$ — длительность полупериода

$$L\left[\frac{2}{\tau_1} \sin^2 \pi t/\tau_1\right] = L\left[\frac{1}{\tau_1} (1 - \cos 2\pi t/\tau_1)\right] = \frac{1}{\tau_1} \frac{4 (\pi/\tau_1)^2}{s [s^2 + 4 (\pi/\tau_1)^2]}. \quad (3.59)$$

Чтобы получить импульс в виде квадрата одного полупериода синусоиды, следует вычесть из рассматриваемой периодической функции такую же функцию, но смещенную на время τ_1 . Поэтому изображение импульса в виде квадрата полупериода синусоиды на основе теоремы смещения при учете (3.59) можно записать так

$$F_1(s) = \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{4 (\pi/\tau_1)^2}{s [s^2 + 4 (\pi/\tau_1)^2]} (1 - e^{-s\tau_1}). \quad (3.60)$$

Изображение импульса (3.56) в виде квадрата полупериода синусоиды, смещенного на время τ , получим, умножив (3.60) на экспоненту, соответствующую запаздыванию:

$$F(s) = F_1(s) e^{-s\tau} = \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{4 (\pi/\tau_1)^2 e^{-s\tau}}{s [s^2 + 4 (\pi/\tau_1)^2]} (1 - e^{-s\tau_1}). \quad (3.61)$$

Вынесем за скобку $\exp(-s\tau/2)$ в числителе. Тогда с учетом нормировки (3.57) получим

$$F(s) = \frac{8}{\tau_1} \cdot \frac{(\pi/\tau_1)^2 e^{-s\tau/2}}{s [s^2 + 4 (\pi/\tau_1)^2]} \operatorname{sh} (s\tau_1/2). \quad (3.62)$$

Из этого выражения легко найти в общем виде нули изображения и нули вещественной и мнимой частей при $s = j\omega$.

Из выражения

$$e^{-j\omega\tau/2} = \cos(\omega\tau/2) - j \sin(\omega\tau/2)$$

следует: нулями вещественной и мнимой частей $F(j\omega)$ являются соответственно нули косинуса и синуса:

$$\alpha_k = \pm (2k + 1), \quad \beta_k = \pm 2k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.63)$$

Кроме указанных величин нулями вещественной и мнимой частей являются нули $F(j\omega)$, т. е. нули $\operatorname{sh}(j\omega\tau_1/2) = j \sin(\omega\tau_1/2)$, которые равны:

$$\gamma_i = \pm 2i\pi/\tau_1 \quad (i = 2, 3, \dots). \quad (3.64)$$

Здесь нули, соответствующие $i=0$ и $i=1$, сокращаются с нулями множителей знаменателя (3.62).

Теперь, когда найдены нули, входящие в искомую функцию приближения, можем написать выражение аппроксимирующей дроби общего вида любого порядка.

Ограничимся рассмотрением дроби минимально возможного порядка, который соответствует учету нулей (3.64) с максимальным индексом $i=1$. При этом обеспечивается еще обязательное сокращение множителей знаменателя (3.62).

При принятом значении верхнего индекса числитель дроби будет постоянной величиной $M(s) = A_1$.

Четную и нечетную части знаменателя дроби образуют нули (3.63):

$$N_2(s) = \prod_{k=0}^{n_1} [s^2 + (2k+1)^2];$$

$$sN_1(s) = s \prod_{k=1}^n (s^2 + 4k^2).$$
(3.65)

Здесь индекс n_1 может принимать два значения: $n = n_1$ — при четной степени знаменателя и $n_1 = n - 1$ — при нечетной степени.

Верхний индекс n следует выбирать из того условия, чтобы наибольший нуль, определяемый максимальным индексом в (3.65), был равен предельной частоте (3.64) при $i=1$:

$$2n = 2\pi/\tau_1; \quad n = \pi/\tau_1. \quad (3.66)$$

Аппроксимирующая дробь получает вид

$$U_2(s) = \frac{A_1}{\prod_{k=0}^{n_1} [s^2 + (2k+1)^2] + A_2 s \prod_{k=1}^n (s^2 + 4k^2)}. \quad (3.67)$$

Если для простоты значения коэффициентов A_1 и A_2 в общем виде определить из приравнивания (3.67) и (3.62) при двух частотах: $s=0$ и $s=j$, то получим

$$A_1 = \prod_{k=1}^{n_1} (2k+1)^2; \quad A_2 = \frac{A_1 \tau_1 [4 - (\tau_1/\pi)^2]}{8 \sin \tau_1/2 \prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)}. \quad (3.68)$$

В частном случае $n = n_1 = 3$ имеем функцию восьмого порядка

$$U_2(s) = \frac{A_1}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+25)(s^2+49) + A_2 s (s^2+4)(s^2+16)(s^2+36)}. \quad (3.69)$$

Согласно (3.68) коэффициенты при $\tau_1 = (\pi/n) = \pi/3$: $A_1 = 3280$; $A_2 = 2,26\pi$.

На рис. 3.9, а показаны графики импульсной характеристики, т. е. оригинала (3.69), и переходной характеристики цепи. Отношение времени задержки к длительности фронта составляет 1,46.

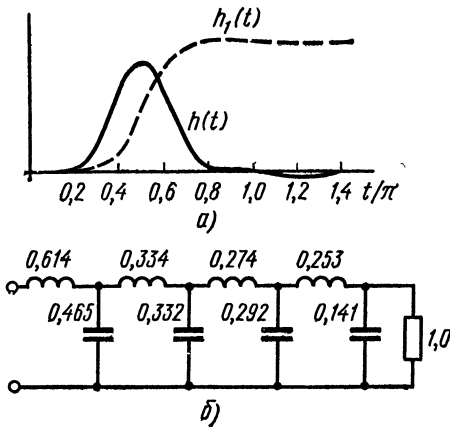


Рис. 3.9

Реализующая схема цепи, полученная разложением y_{22} , т. е. отношения четной части к нечетной части знаменателя (3.69), приведена на рис. 3.9, б. Значения элементов относятся к нормированному сопротивлению нагрузки 1 и времени задержки $\pi/2$. Для пересчета элементов к заданному сопротивлению и времени задержки следует умножить индуктивности на $\pi R/4$ и емкости на $\pi/4R$.

§ 3.6. Синтез реактивной цепи, формирующей импульс прямоугольной формы

Реактивные цепи, формирующие импульсы, близкие по форме к прямоугольной, находят широкое практическое применение, в частности, в мощных импульсных генераторах.

При выборе формы импульса, которая должна быть аппроксимирована, следует учитывать: 1) идеальная прямоугольная форма невозпроизводима цепью с конечным числом сосредоточенных элементов; 2) на практике допустимы конечные времена нарастания и спада с заданной относительной длительностью фронтов. Поэтому целесообразно с самого начала задаваться конечными фронтами.

Примем изменение скорости (первой производной) нарастания и спада выходного импульса по закону квадрата полупериода синусоиды. Импульс в пределах фронтов будет изменяться как интеграл от квадрата полупериода синусоиды.

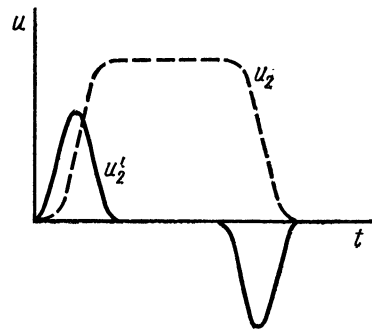


Рис. 3.10

Принятый закон обеспечивает монотонное гладкое изменение фронтов и существование производных довольно высокого порядка (третьего), приводящее к снижению порядка аппроксимирующей функции, и, кроме того, дает дробно-рациональное изображение, что облегчает процесс приближения в комплексной частотной области.

Если принять нормированную длительность импульса у основания $\tau = \pi$ и длительность полупериода синусоиды, определяющей фронты, равной τ_1 , то производную симметричного выходного напряжения можно записать следующим образом:

$$u_2' = \begin{cases} A \sin^2 (\pi t / \tau_1) & 0 < t < \tau_1; \\ 0 & \tau_1 < t < \tau - \tau_1; \\ -A \sin^2 \pi (t - \tau + \tau_1) / \tau_1 & \tau - \tau_1 < t < \tau; \\ 0 & t > \tau = \pi. \end{cases} \quad (3.70)$$

Графики принятой первой производной и самого выходного импульса изображены на рис. 3.10.

Для получения нормированной единичной амплитуды выходного напряжения необходимо амплитуду квадрата полупериода синусоиды выбрать так, чтобы площадь, ограниченная импульсом, была равна единице:

$$A \int_0^{\tau_1} \sin^2 (\pi t / \tau_1) dt = 1.$$

Отсюда амплитуда, равная максимальной скорости нарастания и спада фронтов

$$A = 2 / \tau_1. \quad (3.71)$$

Если длительность фронта оценивать условно как время, в течение которого выходное напряжение нарастает от нуля до амплитудного значения с постоянной скоростью, равной максимальной (3.71), т. е. из условия $A\tau_\phi = 1$, то

$$\tau_\phi = \frac{1}{A} = 0,5\tau_1. \quad (3.72)$$

Длительность фронта, следовательно, приблизительно равна половине полупериода синусоиды.

Чтобы применить метод аппроксимации в комплексной частотной области, запишем изображение по Лапласу (3.70). Согласно (3.60) изображение импульса в виде квадрата полупериода синусоиды при учете (3.71)

$$F_1(s) = \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{4(\pi/\tau_1)^2}{s[s^2 + 4(\pi/\tau_1)^2]} (1 - e^{-s\tau_1}). \quad (3.73)$$

Производная выходного импульса (3.70) получается наложением двух смещенных на время $\tau - \tau_1 = \pi - \tau_1$ импульсов в виде квадрата полупериода синусоиды разных знаков. Поэтому изображение u_2' будет равно изображению (3.73), умноженному на $1 - \exp[-s(\tau - \tau_1)]$.

Деление полученного выражения на s , соответствующее интегрированию во временной области, даст изображение выходного импульса:

$$U_2(s) = L[u_2(t)] = \frac{1}{\tau_1 s^2} \cdot \frac{4(\pi/\tau_1)^2}{s^2 + 4(\pi/\tau_1)^2} (1 - e^{-s\tau_1}) [1 - e^{-s(\tau - \tau_1)}]. \quad (3.74)$$

Вынесем из первой скобки $\exp(s\tau_1/2)$ и второй скобки $\exp[s(\pi - \tau_1)/2]$; в скобках получим разности экспонент с равными по величине, но противоположными по знаку показателями, т. е. гиперболические синусы

$$U_2(s) = \frac{1}{\tau_1 s^2} \cdot \frac{16(\pi/\tau_1)^2}{s^2 + 4(\pi/\tau_1)^2} e^{-s\pi/2} \operatorname{sh}(s\tau_1/2) \operatorname{sh}[s(\pi - \tau_1)/2]. \quad (3.75)$$

В этом выражении в явном виде представлены нули вещественной и мнимой частей и нули самого изображения при $s = j\omega$. Нулями вещественной и мнимой частей являются соответственно нули косинуса и синуса:

$$\alpha_k = \pm(2k + 1); \beta_k = \pm 2k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.76)$$

Кроме этих величин, нулями как вещественной, так и мнимой частей являются нули изображения, равные нулям гиперболических синусов:

$$s_i = \pm j2\pi i/\tau_1; s_l = \pm j2\pi l/\pi - \tau_1 \quad (i = 2, 3, \dots; l = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.77)$$

Нули с индексом $i = 1$, а также два нуля $s = 0$ обоих гиперболических синусов сокращаются с соответствующими нулями знаменателя (3.74). Поскольку интересующие нас нули найдены, то в соответствии с принятым методом аппроксимации можем сразу записать аппроксимирующую дробь любого порядка и для любой относительной длительности фронтов.

Выражения четной и нечетной частей знаменателя будут совпадать с (3.67).

Числитель аппроксимирующей дроби образуют нули (3.77):

$$M(s) = A_1 \prod_{i=2}^{v_1} [s^2 + (2\pi i/\tau_1)^2] \cdot \prod_{l=1}^{v_2} [s^2 + (2\pi l/\pi - \tau_1)^2]. \quad (3.78)$$

Числитель дроби минимального порядка можно получить, если принять верхний индекс в $v_1 = 2$, когда два множителя первого произведения сокращаются. В этом случае верхние индексы остальных произведений следует выбрать из условия равенства их наибольших частот (нулей):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2}{\tau_1} &\approx \frac{2\pi v_2}{\pi - \tau_1}; \quad v_2 \approx 2(\pi - \tau_1)/\tau_1; \\ \frac{2\pi^2}{\tau_1} &\approx 2n, (2n_1 + 1); \quad n \approx 2\pi/\tau_1, \quad \left(n_1 \approx \frac{\pi}{\tau_1} - 0,5\right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Здесь $n_1 = n$ или $n_1 = n - 1$, в случае нечетной степени знаменателя. Если целые значения индексов выбраны, то можно записать выражение аппроксимирующей дроби минимального порядка:

$$U_2(s) = \frac{A_1 \prod_{l=1}^{v_2} [s^2 + (2\pi l/\pi - \tau_1)^2]}{\prod_{k=0}^{n_1} [s^2 + (2k + 1)^2] + A_2 s \prod_{k=1}^n (s^2 + 4k^2)}. \quad (3.80)$$

Рассмотрим частный случай $\tau_1 = \pi/3$, когда заданная длительность фронта $\tau_\phi = 0,5\tau_1 = \pi/6$, а длительность импульса на уровне 0,5 составляет $\tau_0 = \pi - \tau_1$, так что $\tau_\phi = 0,25\tau$. Если согласно (3.79) принять $\nu_2 = 2$; $n = 3$ и $n_1 = 2$, то получим дробь седьмого порядка:

$$U_2(s) = \frac{A_1(s^2 + 9)(s^2 + 36)}{A_2s(s^2 + 4)(s^2 + 16)(s^2 + 36) + (s^2 + 1)(s^2 + 9)(s^2 + 25)}. \quad (3.81)$$

Приравняв (3.75) и (3.81) при двух частотах: $s=0$ и $s=j$, находим первое приближение к значениям коэффициентов:

$$A_1 = 1,453; \quad A_2 = 0,152.$$

На рис. 3.11 показан оригинал (3.81), который достаточно близок к заданной форме импульса.

Обычно импульсы формируются при действии источника постоянного напряжения. Приняв амплитуду этого напряжения равной $1/K$, получим функцию передачи

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = sKU_2(s) = \frac{KA_1s(s^2 + 9)(s^2 + 36)}{A_2s(s^2 + 4)(s^2 + 16)(s^2 + 36) + (s^2 + 1)(s^2 + 9)(s^2 + 25)}. \quad (3.82)$$

Так как принята нормированная единичная амплитуда выходного импульса, то значение K , определяемое в процессе реализации, является отношением амплитуд выходного и входного напряжений, называемое коэффициентом использования напряжения источника.

Выражение (3.82) представляет функцию передачи реактивного четырехполюсника лестничной структуры, нагруженного активным сопротивлением. Реализация функции может быть произведена по двум элементам матрицы проводимостей по методу, изложенному в § 2.3.

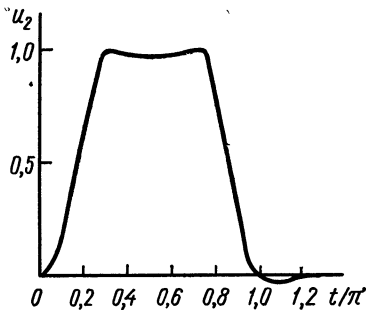


Рис. 3.11

§ 3.7. О синтезе широкополосных согласующих цепей

В ряде устройств радиоэлектроники и передачи информации требуется обеспечить передачу в некоторой полосе частот максимально возможной мощности от источника напряжения с внутренним сопротивлением Z_1 (или источника тока с внутренней проводимостью Y_1) к нагрузке с сопротивлением Z или проводимостью Y .

Если сопротивления источника и нагрузки имеют чисто резистивный характер: $Z_1 = R_1$; $Z = R$, то, как известно, режим пере-

дачи максимальной мощности нагрузке, называемый режимом оптимального согласования, получается при $R=R_1$. В данном случае чисто резистивных двухполюсников режим оптимального согласования не зависит от частоты — согласование имеет место в бесконечной полосе частот.

Если внутреннее сопротивление источника имеет комплексный, т. е. частотно-зависимый вид

$$Z_1(j\omega) = r_1(\omega) + jx_1(\omega),$$

то оптимальное согласование получается, когда комплексное сопротивление нагрузки является сопряженным сопротивлению источника:

$$Z(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega) = Z_1^*(j\omega) = r_1(\omega) - jx_1(\omega).$$

Режим согласования в данном случае имеет место только для одной определенной частоты. В большинстве случаев внутреннее сопротивление источника является резистивным, а нагрузка наряду с резистивным сопротивлением, обозначающим полезное потребление энергии, содержит то или иное число реактивных элементов — емкостей и индуктивностей, являющихся, как правило, паразитными параметрами, которыми нельзя пренебречь на высоких частотах. К таким параметрам следует отнести в первую очередь емкость, шунтирующую нагрузку; часто нагрузка имеет резонансные свойства, которые могут быть представлены только цепями второго или более высокого порядка. В рассматриваемом

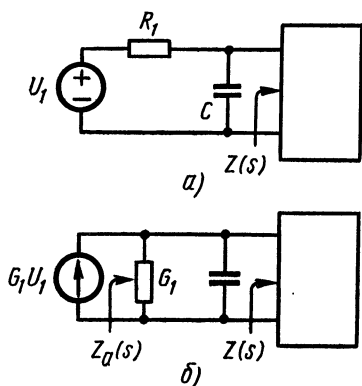


Рис. 3.12

случае резистивного сопротивления источника и комплексной нагрузки оптимальное согласование в принципе может быть достигнуто при одной, именно нулевой частоте, когда влияние реактивных параметров нагрузки исключается.

Но, как указывалось, требуется иметь режим согласования в заданной достаточно широкой полосе частот. Оказывается, выполнить условие идеального согласования в достаточно широкой полосе частот в случае нагрузки, содержащей наряду с резистивным также реактивные элементы, невозможно. Наличие принудительно заданных реактивных элементов накладывает определенные ограничения на произведение ширины полосы и коэффициента передачи мощности. Под коэффициентом передачи или усиления мощности $\omega(\omega)$ понимают отношение мощности, выделяемой на заданной нагрузке, к оптимальной мощности, которая выделялась бы на идеально-согласованной нагрузке.

Рассмотрим коэффициент передачи мощности и ограничения, накладываемые на него наличием емкости, присоединенной парал-

дельно нагрузке, представленной двухполюсником с сопротивлением $Z(s)$ и питаемой от источника напряжения с внутренним сопротивлением R_1 (рис. 3.12, а). Будем полагать $Z(s)$ минимально реактивным, т. е. не имеющим нулей и полюсов на мнимой оси. Преобразовав источник напряжения в эквивалентный источник тока, получим двухполюсную цепь (рис. 3.12, б), включающую кроме нагрузки емкость и внутреннюю проводимость источника, с общим сопротивлением

$$Z_a(s) = 1/(Y(s) + sC + G_1). \quad (3.83)$$

Эта п. в. ф. не имеет полюсов в правой полуплоскости, а также на мнимой оси; степень числителя ее на единицу меньше степени знаменателя. Схема цепи состоит из двухполюсника с явно выведенной емкостью, питаемого от источника тока с током U_1/R_1 . Средняя за период мощность, потребляемая цепью в синусоидальном режиме,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |I_1|^2 \operatorname{Re} Z_a(j\omega) = \\ &= \frac{1}{2} |U_1|^2 \frac{1}{R_1^2} \operatorname{Re} Z_a(j\omega). \end{aligned}$$

При оптимальном согласовании, которое может быть достигнуто для любой фиксированной частоты, максимальная средняя мощность цепи

$$P_m = |U_1|^2 \frac{1}{4R_1}.$$

Коэффициент передачи мощности

$$\omega(\omega^2) = \frac{P}{P_m} = \frac{2}{R_1} \operatorname{Re} Z_a(j\omega) \leq 1 \quad (3.84)$$

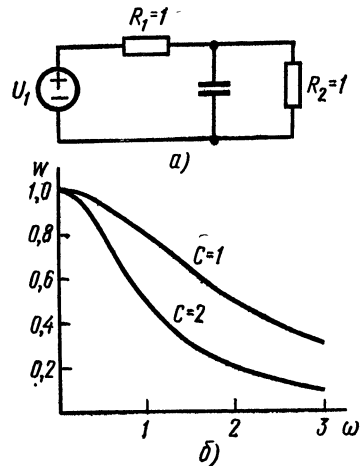


Рис. 3.13

определяется вещественной частью общего сопротивления, включающего сопротивление источника. Только при оптимальном согласовании, когда $\operatorname{Re} Z_a = R_1/2$ коэффициент передачи мощности равен единице.

Для иллюстрации влияния реактивного элемента — емкости рассмотрим цепь из источника с внутренним сопротивлением $R_1 = 1$ и нагрузочного двухполюсника, составленного из резистивного элемента $R = R_1 = 1$ и шунтирующей емкости C (рис. 3.13, а).

Общее сопротивление цепи

$$Z_a = \frac{1}{1 + sC + 1} = \frac{1}{2 + sC}.$$

Вещественная часть при $s = j\omega$

$$r_a = \operatorname{Re} Z_a = \operatorname{Re} \frac{1}{2 + j\omega C} = \frac{2}{4 + \omega^2 C^2}.$$

Согласно (3.84) коэффициент передачи мощности

$$\omega(\omega^2) = 4/(4 + \omega^2 C^2).$$

На рис. 3.13, б показана частотная зависимость ω при $C=1$ и $C=2$. Как видим, из-за наличия емкости коэффициент передачи мощности резко падает с увеличением частоты от максимального единичного значения ($\omega=0$) до нуля. Чем больше емкость, тем быстрее спад и тем меньше площадь, ограниченная характеристикой, так что последняя может служить мерой влияния реактивного элемента.

Рассмотрим в общем виде влияние емкости на коэффициент передачи мощности, который в зависимости от частоты представляется некоторой кривой — частотной характеристикой мощности.

Площадь, ограниченную этой кривой, можно выразить с учетом (3.84) в следующем виде:

$$A = \int_0^{\infty} \omega(\omega) d\omega = \frac{2}{R_1} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} Z_a(j\omega) d\omega. \quad (3.85)$$

Значение интеграла положительно, поскольку вещественная часть п. в. ф. $Z_a(j\omega) = r_a(\omega) + jx_a(\omega)$ не принимает отрицательных значений. Ввиду четности вещественной части и нечетности мнимой части интеграл (3.85) можно переписать:

$$A = \frac{1}{R_1} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} Z_a(j\omega) d\omega = \frac{1}{R_1} \int_{-\infty}^{\infty} Z_a(j\omega) d\omega.$$

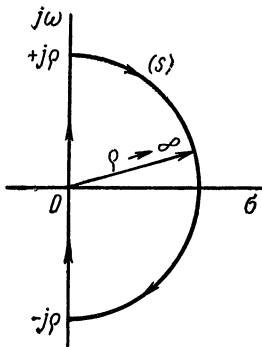


Рис. 3.14

Положив $j\omega = s$, получим аналитическое продолжение на плоскость комплексной переменной

$$A = \frac{1}{jR_1} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z(s) ds. \quad (3.86)$$

Положительно-вещественная функция входного сопротивления пассивной цепи, включающая резистивный элемент, не имеет полюсов в правой полуплоскости и на оси $j\omega$ — является аналитической в открытой правой полуплоскости. Для вычисления интеграла (3.86) следует применить контурное интегрирование, приняв в качестве контура (рис. 3.14) участки $-j\rho$ и $+j\rho$ мнимой оси и дугу полуокружности радиуса $\rho \rightarrow \infty$. Интеграл по контуру, не содержащему полюсов, согласно теореме Коши о вычетах

$$\oint Z_a(s) ds = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\int_{-j\rho}^{j\rho} Z_a(s) ds + \int_{\pi/2}^{-\pi/2} Z_a(\rho e^{j\psi}) j\rho e^{j\psi} d\psi \right) = 0.$$

Отсюда искомый интеграл

$$A = \frac{1}{R_1} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z_a(s) ds = -\frac{1}{R_1} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} Z_a(\rho e^{j\psi}) \rho e^{j\psi} d\psi. \quad (3.87)$$

Интеграл определяется поведением $Z(s)$ при $s \rightarrow \infty$. Для рассматриваемой цепи из емкости, присоединенной параллельно нагрузке, функция сопротивления (3.83) является правильной дробью, степень числителя которой на единицу меньше степени знаменателя. Делением числителя на знаменатель (3.83) разложим Z_a в ряд по обратным степеням s (в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки):

$$Z_a(s) = \frac{1}{sC} - \frac{G}{s^2C^2} - \frac{1}{s^2C^2Z(s)} - \dots \quad (3.88)$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что интеграл (3.87) от слагаемых, убывающих при $s \rightarrow \infty$ быстрее $1/s$, равен нулю. Поэтому при учете первого слагаемого $Z_a(s)$ значение интеграла

$$A = \frac{-1}{R_1} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{1}{sC} \rho e^{j\psi} d\psi = \frac{\pi}{R_1 C}. \quad (3.89)$$

Площадь под кривой коэффициента мощности при наличии емкости, шунтирующей сопротивление нагрузки, не может превысить значения π/R_1C . Если нагрузка $Z(s)$ содержит емкость, то площадь

$$A \leq \pi/R_1C. \quad (3.90)$$

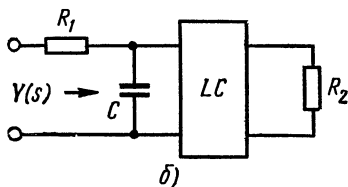
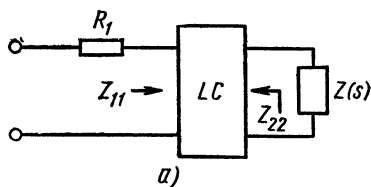


Рис. 3.15

В устройствах связи и передачи информации, как указывалось, часто требуется передача мощности нагрузке с допустимым малым отклонением коэффициента ω (ω^2) от постоянной величины в заданной полосе частот. Задача эта решается введением между нагрузкой $Z(s)$ и источником напряжения с внутренним сопротивлением $R_1=1$ согласующего четырехполюсника без потерь (рис. 3.15, а). Назначение согласующего четырехполюсника состоит в том, чтобы в заданной полосе частот преобразовать частотно-зависимое сопротивление нагрузки $Z(s)$ по возможности в постоянное входное сопротивление Z_{11} цепи. Получить $Z_{11}=1$, при котором обеспечивалась бы передача максимальной мощности в некоторой полосе частот, невозможно из-за ограничений, обусловленных паразитными параметрами.

Ограничение, налагаемое наличием паразитной емкости, которая присоединена на входе согласующего четырехполюсника

(рис. 3.15, б), выражают через коэффициент отражения

$$S_{11} = \frac{Y(s) - 1/R_1}{Y(s) + 1/R_1}, \quad (3.91)$$

где $Y(s)$ — входная проводимость четырехполюсника с учетом емкости.

Применительно к четырехполюснику без потерь коэффициент передачи мощности имеет смысл квадрата модуля нормированного передаточного коэффициента рассеяния, который согласно (В.6) связан с коэффициентом отражения на входе зависимостью

$$\omega(\omega^2) = |S_{21}(j\omega)|^2 = 1 - |S_{11}(j\omega)|^2. \quad (3.92)$$

Степени числителя и знаменателя коэффициента отражения одинаковы, поэтому его разложение по отрицательным степеням (ряд Лорана) представится как

$$S_{11}(s) = 1 - \frac{2}{sR_1C} + \dots$$

Интегральное ограничение формулируется через натуральный логарифм от модуля коэффициента отражения следующим образом [16]:

$$\int_0^{\infty} \ln \left| \frac{1}{S_{11}(j\omega)} \right|^2 d\omega \leq \frac{\pi}{R_1C}. \quad (3.93)$$

В соответствии с этим выражением, вывод которого мы опускаем, если задаться в некоторой полосе частот $\Delta\omega$ постоянным минимальным значением коэффициента отражения $|S_{11}(j\omega)| = \rho_0$, а вне этого интервала принять $\rho = 1$, то будем иметь

$$\ln \frac{1}{\rho_0} = \pi/R_1C \Delta\omega; \quad \rho_0 = e^{-\pi/R_1C \Delta\omega}.$$

Согласно (3.92) соответствующий передаточный коэффициент рассеяния

$$|S_{21}|_{\max} = 1 - e^{-2\pi/R_1C \Delta\omega}.$$

Здесь приведены интегральные ограничения для двухполюсной и четырехполюсной цепей, обусловленные наличием параллельной паразитной емкости. В случае нескольких реактивных параметров в виде емкостей и индуктивностей, образующих цепи определенной конфигурации, вывод соответствующих ограничивающих условий существенно усложняется.

Перейдем теперь к краткому изложению некоторых положений синтеза согласующих цепей по методу Юлы [16], не вдаваясь в детали и доказательства.

Задача синтеза согласующей цепи, включенной между заданными внутренним сопротивлением источника R_1 и сопротивлением нагрузки Z , состоит в следующем: требуется построить реактивный четырехполюсник, обеспечивающий с допустимой точностью

постоянство в заданной полосе частот коэффициента передаваемой в нагрузку мощности ω (ω^2).

Идеальная частотная характеристика модуля ω (ω^2), которую желательно иметь, будет представляться прямоугольником, площадь которого, как мы видели, ограничена заданными паразитными реактивными элементами. Подобная частотная характеристика должна быть аппроксимирована рациональной дробью $\bar{\omega}$ (ω^2) аналогично рассмотренной выше аппроксимации характеристики фильтров по Баттерворсу или Чебышеву. Поскольку желательно получить максимальную крутизну спада характеристики на границе полосы согласования при заданной степени аппроксимирующей функции, то применение Чебышевского приближения предпочтительнее. После выбора частотной зависимости коэффициента передачи мощности в виде рациональной дроби

$$0 \leq \bar{\omega}(\omega^2) \leq 1$$

необходимо перейти к определению параметров цепи и ее реализации. В результате должна быть найдена согласующая реактивная цепь, включенная между источником с внутренним сопротивлением R_1 и заданным нагрузочным сопротивлением Z (рис. 3.15, а), которая должна обеспечить получение принятого закона изменения коэффициента ω . Уровень ω (ω^2) не задается, а определяется в процессе расчета. Требуемый коэффициент отражения на выходе цепи связан с принятым коэффициентом ω (ω^2) при $j\omega = s$ согласно (3.92):

$$\rho(s) \rho(-s) = 1 - \omega(-s^2). \quad (3.94)$$

Коэффициент отражения на выходе, с другой стороны, определяется сопротивлением нагрузки и выходным сопротивлением четырехполюсника Z_{22} . Поэтому достижимое значение коэффициента передачи мощности зависит как от характера нагрузки, так и от условий получения п. в. ф. Z_{22} . Задача состоит в определении Z_{22} , по которому можно построить с помощью метода Дарлингтона искомый четырехполюсник без потерь, нагруженный на входе на сопротивление R_1 . Коэффициент отражения тока на выходе выразим через параметры цепи следующим образом:

$$S_{22}(s) = \frac{Z_{22}(s) - Z(-s)}{Z_{22}(s) + Z(s)}. \quad (3.95)$$

Здесь $Z(-s)$ сопряженное $Z(s)$ сопротивление, которое при $Z(-s) = Z_{22}(s)$ приводит к идеальному согласованию $S_{22} = 0$. Но такое положение, как указывалось, достижимо только при одной определенной частоте.

Для устранения полюсов в правой полуплоскости, обусловленных выражением $Z(-s)$, умножают (3.95) на функцию фазового контура, порядок которой ν равен порядку $Z(s)$:

$$\beta(s) = \prod_{k=1}^{\nu} \frac{s - \mu_k}{s + \mu_k}. \quad (3.96)$$

Функция $\beta(s)$ определяется полюсами $Z(-s)$ в правой полуплоскости; ее модуль $|\beta(s)|=1$, поэтому модуль S_{22} не изменяется. В результате получим нормированный коэффициент отражения, регулярный в правой полуплоскости:

$$\rho(s) = \beta(s) \frac{Z_{22}(s) - Z(-s)}{Z_{22}(s) + Z(s)}. \quad (3.97)$$

На основе этого равенства составим выражение, из которого можно вывести интересующие нас ограничения на коэффициент отражения $\rho(s)$ и связанный с ним коэффициент передачи мощности $\omega(\omega^2)$:

$$\beta(s) - \rho(s) = \frac{2\beta(s) \operatorname{Re} Z(s)}{Z_{22} + Z(s)}. \quad (3.98)$$

Здесь четная часть сопротивления нагрузки

$$\operatorname{Re} Z(s) = r(s) = \frac{1}{2} [Z(s) + Z(-s)].$$

Ограничения обусловлены нулями s_0 в правой полуплоскости четной части $r(s)$, имеющими кратность m .

Поскольку п. в. ф. Z_{22} и $Z(s)$ не имеют нулей и полюсов в правой полуплоскости, то нули s_0 являются также нулями левой части (3.98):

$$\rho(s_0) = \beta(s_0). \quad (3.99)$$

Это равенство и обуславливает главные ограничения на $\rho(s)$. Для получения ограничивающих условий функции, входящие в (3.98), представляют в виде рядов в окрестности s_0 :

$$\begin{aligned} \rho(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k (s - s_0)^k; \\ \beta(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k (s - s_0)^k; \\ r(s) \beta(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k (s - s_0)^k; \\ Z(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k (s - s_0)^k \quad (|s_0| < \infty); \\ Z(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} D'_k (s - s_0)^k \quad (|s_0| = \infty). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Подстановка рядов в (3.98) дает ограничения на их коэффициенты. В зависимости от места расположения нулей s_0 в замкнутой правой полуплоскости четной части $r(s)$, называемых нулями передачи, и вида $Z(s)$ на основе (3.98) получаются ограничения на коэффициенты (3.100), соответствующие следующим четырем классам:

I. Нули в правой полуплоскости $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ ($\sigma_0 > 0$):

$$A_k = B_k; \quad k=0, 1, \dots, m-1. \quad (3.101)$$

II. Нули на мнимой оси $s_0 = j\omega_0$; $|Z(j\omega_0)| < \infty$:

$$A_k = B_k; \quad k=0, 1, \dots, m-2; \\ \frac{A_{m-1} - B_{m-1}}{C_m} \leq 0. \quad (3.102)$$

III. Нули на мнимой оси: $s_0 = j\omega_0$; $Z(j\omega_0) = \infty$:

$$A_k = B_k; \quad k=0, 1, \dots, m; \\ \frac{C_m}{A_{m+1} - B_{m+1}} + D_{-1} \leq 0. \quad (3.103)$$

IV. Полюс Z на оси $j\omega$, который не является нулем передачи:

$$A_0 = B_0; \\ \frac{C_0}{A_1 - B_1} + D_{-1} \leq 0. \quad (3.104)$$

С помощью выражений (3.101) — (3.104) можно определить значения, которым должны удовлетворять коэффициенты A_k разложения $\rho(s)$. Приравняв этим значениям соответствующие коэффициенты разложения в ряд в окрестности нулей передачи выражения (3.94) для $\rho(s)$, найденному по принятому коэффициенту передачи мощности, определим ограничения на уровень $w(\omega^2)$.

Можно показать, что при выполнении приведенных условий (3.101) — (3.104) искомое выходное сопротивление четырехполюсника со стороны нагрузки, равное согласно (3.98)

$$Z_{22}(s) = \frac{2\beta(s)r(s)}{\beta(s) - \rho(s)} - Z(s), \quad (3.105)$$

является п. в. ф. Следовательно, оно может быть реализовано по методу Дарлингтона в виде искомого согласующего четырехполюсника без потерь, нагруженного сопротивлением источника $R_1 = 1$.

Рассмотрим пример расчета согласующей цепи для нагрузки из параллельно соединенных сопротивления и емкости с нормированными значениями элементов $R_1 = 1$ и $R_2 = 1$. Для коэффициента передачи мощности примем максимально плоскую характеристику по Баттерворсу при $n=3$ (§ 3.4)

$$w(\omega^2) = \frac{K^2}{1 + (\omega/\omega_c)^6}, \quad 0 \leq K \leq 1,$$

где ω_c — граничная частота полосы (на уровне 0,707).

Согласно (3.98) коэффициент отражения

$$|\rho(j\omega)|^2 = 1 - w(\omega^2) = \frac{1 - K^2 + (\omega/\omega_c)^6}{1 + (\omega/\omega_c)^6}.$$

Величина $0 \leq l^6 = (1 - K^2) \leq 1$ определяет значение модуля $\rho(0)$ при нулевой частоте.

Положив $j\omega = s$; $\omega^2 = -s^2$, имеем

$$\rho(s) \rho(-s) = \frac{(1-K^2) \omega_c^6 - s^6}{\omega_c^6 - s^6}.$$

Отделив полюсы (а также нули), лежащие в левой полуплоскости $s_1 = -\omega_c$; $s_{2,3} = -0,5\omega_c \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c$, получим

$$\rho(s) = \frac{(s+l\omega_c)(s^2+l\omega_c s+l^2\omega_c^2)}{(s+\omega_c)(s^2+\omega_c s+\omega_c^2)}.$$

Сопrotивление нагрузки

$$Z(s) = \frac{1}{s+1}; \quad Z(-s) = \frac{1}{-s+1}.$$

Четная часть

$$r(s) = \frac{1}{2} [Z(s) + Z(-s)] = \frac{1}{1-s^2}$$

имеет двухкратный нуль в бесконечности ($m=2$). При $s=\infty$ $Z(s)=0$ имеем нуль передачи класса II. Поскольку $Z(-s)$ имеет полюс $s=1$ в правой полуплоскости, то

$$\beta(s) = \frac{s-1}{s+1}; \quad 2r(s)\beta(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)(1-s^2)} = \frac{-2}{(s+1)^2}.$$

Разложение интересующих нас величин в ряд по обратным степеням s (ряд Лорана) путем деления дает

$$\begin{aligned} \beta(s) &= 1 - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3} + \dots; \\ 2r(s)\beta(s) &= -\frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \dots; \\ Z(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \dots \end{aligned}$$

Согласно (3.102) коэффициенты разложения $\rho(s)$ равны:

$$A_0 = 1; \quad \frac{A_1 - B_1}{C_2} = \frac{A_1 + 2}{-2} = 0; \quad A_1 = -2.$$

Разложение полученного выше выражения $\rho(s)$ дает коэффициенты:

$$A_0 = 1; \quad A_1 = 2\omega_c(l-1).$$

Приравняв полученные значения коэффициентов, имеем:

$$2\omega_c(l-1) = -2; \quad \omega_c = \frac{1}{1-l}.$$

При $\omega_c = 1$ $l = 0$ и

$$\rho(s) = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

В соответствии с (3.105) для выходного сопротивления иско-
мой цепи имеем

$$Z_{22}(s) = \frac{2s^2 + 2s + 3}{s + 1} = 2s + \frac{3}{s + 1}.$$

На рис. 3.16 показана схема цепи, полученная в результате
непосредственной реализации без использования метода Дарлинг-
тона.

Так как сопротивление
 R_1 получилось равным трем,
то между источником и
цепью необходимо вклю-
чить понижающий транс-
форматор с $n_{тр} = \sqrt{3}$.

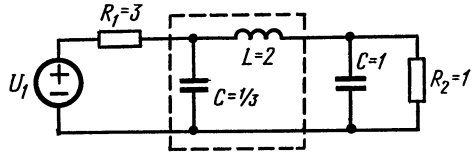


Рис. 3.16

§ 3.8. Понятие о задаче оптимизации цепей с помощью цифровых вычислительных машин

В настоящее время цифровые вычислительные машины
(ЦВМ) широко используют в синтезе линейных электрических цепей.
В первую очередь ЦВМ применяют для решения задач аппроксима-
ции и оптимизации параметров электрических цепей. Примене-
ние ЦВМ позволяет получить с помощью численных методов ре-
шения и результаты, не достижимые на основе классических ана-
литических методов. Вопрос применения ЦВМ в синтезе цепей и
оптимизации схем является весьма обширным и его изложение
выходит за рамки настоящей книги. Поэтому приведем здесь
кратко только общие понятия задачи оптимизации схем.

В предыдущих параграфах этой главы были даны примеры
решения некоторых задач синтеза электрических цепей, основан-
ные на применении аналитических методов. Но с помощью ана-
литических методов можно получить решение, приводящее к цепи
с идеальными элементами. Кроме того, с помощью аналитического
подхода трудно получить решения, учитывающие одновременно
различные характеристики: частотные и временные, что весьма
желательно для ряда инженерных задач. Весьма важным с прак-
тической точки зрения является также получение решений, удов-
летворяющих различным технологическим требованиям, например,
минимального разброса номинальных значений элементов и т. д.

Остановимся на одной, весьма важной для практики проблеме,
требующей использования методов оптимизации с помощью ЦВМ.

Практически применяемые для построения цепей реальные
элементы отличаются от идеальных наличием потерь, а также
реактивных паразитных параметров. Характеристика реальной
цепи, построенной из таких элементов, будет отличаться от при-
нятой расчетной характеристики, по которой произведен синтез
аналитическими методами в предположении идеальных элементов.
Особенно велико влияние конечной добротности катушек на ха-

характеристики фильтров высокого порядка с крутыми изменениями затухания вблизи граничных частот. В связи со сказанным необходимо произвести пересчет или подгонку элементов схемы с учетом существенных неучтенных паразитных параметров для улучшения ее характеристики. Процесс пересчета параметров схемы с целью получения наилучшей в том или ином смысле характеристики называют оптимизацией. Оптимизация может производиться для улучшения различных характеристик цепи: частотной, временной, чувствительности к изменению параметров и т. п. или сочетания нескольких характеристик.

С математической точки зрения оптимизация сводится к обращению в минимум значения функции ошибки, называемой также целевой функцией и зависящей от n параметров x_i цепи и одной переменной y : частоты или времени

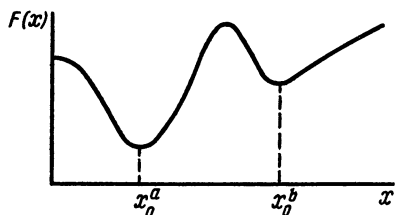


Рис. 3.17

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y). \quad (3.106)$$

В качестве критериев минимума принимают среднеквадратический метод или Чебышевский метод обращения в минимум максимального отклонения.

Имеются численные методы минимизации и программы, позволяющие решать различные задачи оптимизации. Наиболее простыми из них являются методы, основанные на линеаризации и приводящие к задаче линейного программирования. Наряду с минимизацией функций с помощью линейного программирования находят широкое применение также методы минимизации нелинейных функций, приводящие к так называемой задаче нелинейного программирования. Решение задачи обычно производится последовательным приближением или итерацией.

Перейдем к изложению некоторых общих положений оптимизации.

Рассмотрим сначала простейшую функцию ошибки с одним переменным параметром $F(x)$, которая будет изображаться кривой в двумерной системе координат. В общем случае функция $F(x)$ может иметь несколько минимумов, как это показано на рис. 3.17. Эти минимумы называют локальными, а наименьший из них — глобальным минимумом.

В случае непрерывной дифференцируемой функции одной переменной необходимое и достаточное условия минимума функции, как известно, состоят в равенстве нулю первой производной и положительности второй производной:

$$\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0; \quad \left. \frac{d^2F(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0. \quad (3.107)$$

Второе неравенство следует из разложения функции $F(x)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки минимума. В предположении

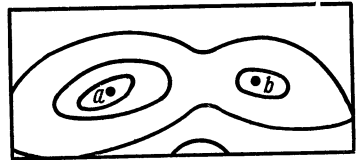
малости отклонения $\Delta x = x - x_0$ можно ограничиться первыми тремя членами разложения:

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0) \Delta x + \frac{1}{2} F''(x_0) (\Delta x)^2. \quad (3.108)$$

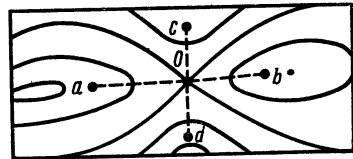
В непосредственной близости от точки минимума, где производная равна нулю, приращение функции положительно:

$$\Delta F(x) = F(x) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0) (\Delta x)^2 > 0. \quad (3.109)$$

Функция ошибки, зависящая от двух переменных $F(x_1, x_2)$, будет изображаться поверхностью в трехмерной координатной системе. Минимумам соответствуют те точки поверхности, в ближайшей окрестности которых функция по всем направлениям возрастает. На плоском чертеже удобно вид поверхности изображать линиями уровня, которые являются линиями пересечения поверхности горизонтальными плоскостями, отстоящими друг от друга на одинаковых расстояниях (рис. 3.18, а, б). Точки минимума, соответствующие точкам касания поверхности горизонтальными плоскостями, будут охватываться несколькими замкнутыми линиями, которые соответствуют повышению значений функции по всем направлениям. Чем круче изменение функции, тем гуще располагаются линии уровня.



а)



б)

Рис. 3.18

Аналогичное изображение рельефа местности с помощью линий равного уровня применяют при составлении топографических карт. Очень полезно окрестность минимума образно представлять себе в виде замкнутого оврага или понижения местности. Минимуму соответствует дно оврага — его наинизшая точка.

В общем случае может быть несколько локальных минимумов. Наименьший из локальных минимумов во всей области допустимых изменений переменных является глобальным минимумом.

Необходимое условие минимума непрерывной функции двух переменных состоит в равенстве нулю частных производных:

$$\frac{\partial F_1(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} = 0. \quad (3.110)$$

Но записанного условия недостаточно для получения минимума: в седловой точке (точке перевала) частные производные равны нулю, но она не является точкой минимума (или максимума). В седловой точке (рис. 3.18, б) линии равных уровней пересекаются; в ее окрестности на некоторых направлениях $(0 - a;$

0 — b) имеем понижение уровней, а на других направлениях (0 — c ; 0 — d) — повышение уровней.

Для получения достаточных условий функцию двух переменных $F(x_1, x_2)$ разлагают в ряд Тэйлора в окрестности точки минимума. При малых отклонениях переменных $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$ и $\Delta x_2 = x_2 - x_{20}$ от точки минимума можно ограничиться тремя членами разложения:

$$F(x_1, x_2) = F(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2} \Delta x_2 + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1^2} \Delta x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 + \frac{\partial^2 F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2^2} \Delta x_2^2 \right]. \quad (3.111)$$

Положительность приращения функции $\Delta F = F(x_1, x_2) - F(x_{10}, x_{20})$ вблизи точки минимума, где первые производные равны нулю, будет обеспечиваться только при положительности выражения в квадратных скобках, представляющего вещественную квадратичную форму от приращений Δx_i . Для положительности вещественной квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы ее матрица

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x_{10}, x_{20})}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \quad (3.112)$$

была положительно-определенной.

Следовательно, достаточное условие минимума функции $F(x_1, x_2)$ состоит в том, чтобы матрица (3.112) вторых частных производных функций в исследуемой точке была положительно-определенной. Для этого, как указывалось в § 1.1, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы и его главные миноры были положительными.

Запишем приведенные соотношения в векторно-матричной форме, широко применяемой в теории оптимизации. Такая запись позволяет распространить формально соотношения для двухмерной функции на случай n -мерной функции.

Введем n -мерные векторы или столбцовые матрицы переменных (координат), приращений переменных и первых частных производных функции ошибки по координатам:

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}; \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{vmatrix}; \quad \mathbf{G}(F) = \begin{vmatrix} \partial F / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial F / \partial x_n \end{vmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}. \quad (3.113)$$

Составляющими первых двух векторов являются переменные и их приращения по ортогональным координатным осям, а второго вектора, называемого градиентом функции, — частные производные функции ошибки по тем же осям. Функцию ошибки от n переменных можем теперь записать как $F(\mathbf{x})$.

Введем в качестве обобщения (3.112) квадратную $n \times n$ матрицу, элементами которой являются значения вторых частных производных функций по координатам в точке минимума:

$$\mathbf{H}(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x_0)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}. \quad (3.114)$$

Ряд Тэйлора (3.111) при обобщении на случай n переменных запишется в следующей векторной форме:

$$F(x) = F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \mathbf{G}(F) \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \mathbf{H} \Delta x, \quad (3.115)$$

где $\Delta x^T = \|x_1 \dots x_n\|$ — транспонированная матрица. Внешне это выражение одинаково со скалярным выражением (3.108).

Необходимое условие минимума функции ошибки запишется в виде равенства нулю градиента функции в точке $x = x_0$:

$$\mathbf{G}[F(x_0)] = 0, \quad (3.116)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевая матрица.

Достаточное условие минимума, обеспечивающее возрастание функции при отклонении переменной от точки равновесия по всем направлениям, сводится к тому, что квадратная матрица \mathbf{H} вторых частных производных в точке минимума должна быть положительно-определенной матрицей.

Функция ошибки часто является сложной нелинейной функцией многих переменных — параметров цепи. Поиск минимума такой функции, как указывалось, производится численными методами последовательного улучшения приближения на ряде шагов, начиная от некоторого нулевого приближения. Выбор нулевого приближения во многом решает успех процесса оптимизации. Дело в том, что при большом числе переменных функция ошибки часто имеет ряд минимумов и при неудачном выборе начального приближения поиск может привести к одному из локальных минимумов. Хорошее начальное приближение увеличивает вероятность того, что поиск приведет к глобальному минимуму.

Нулевое решение находят обычно с помощью приближенных аналитических методов.

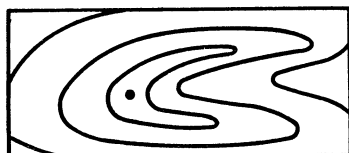
Последовательное улучшение исходного приближения, приводящее к достижению искомого минимума функции ошибки, обычно производят с помощью методов спуска. Отдельным шагам приближения геометрически соответствует движение в n -мерном пространстве по зигзагообразной линии склона оврага до нижней точки. Число шагов поиска, определяющее быстроту спуска, существенно зависит от формы поверхности, изображающей функцию, иначе говоря от формы линий или поверхностей уровня.

Наиболее благоприятные условия получаются в случаях, когда линии уровня близки по форме к окружностям, а поверхности

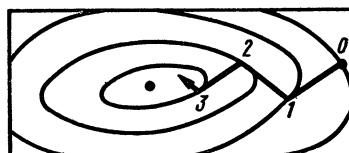
уровня — к сферам. Менее благоприятные условия будут в случае линий и поверхностей уровня в виде вытянутых эллипсов или эллипсоидов (рис. 3.19, а). Положение здесь можно до некоторой степени выправить изменением масштабов по осям параметров таким образом, чтобы чувствительности функции ошибки к изменениям всех параметров, т. е. отношения относительных изменений функции цепи к относительным изменениям параметров, получились приблизительно одинаковыми.



а)



б)



в)

Рис. 3.19

Более простой практически приемлемый путь состоит во введении вместо самих параметров их процентных изменений. Нужное изменение масштаба деформирует поверхности уровня — растягивает или сжимает размеры по соответствующим осям, приближая ее к сфере.

Поиск минимума существенно затрудняется в случае более сложных форм линий или поверхностей уровня, в частности изогнутых под малым радиусом кривизны (рис. 3.18, б). Здесь изменение масштабов не может улучшить положения.

Вычисления по определению минимума функции начиная от исходного нулевого решения (оно предполагается достаточно близким к минимуму) с помощью численных методов спуска производят в таком порядке. Для заданной начальной точки x^0 определяется направление, в котором функция ошибки $F(x)$ убывает, и производится малое изменение переменных Δx^1 в этом направлении. Для получившихся новых значений переменных $x^1 = x^0 + \Delta x^1$ величина функции ошибки будет меньше.

Для точки x^1 определяется новое направление убывания функции и в этом направлении производится малое перемещение переменных на Δx^2 и далее процесс приближения повторяется.

Если изменение или перемещение параметров невелико, то на каждом шаге функция будет убывать и в конце концов будет достигнут минимум. Признаком достижения минимума и окончания вычислений является прекращение убывания функции ошибки.

Очень важными для практики вопросами являются общее число шагов итерации, т. е. скорость сходимости процесса, и объем вычислений, который требуется производить на каждом шаге. Эти моменты определяют требуемое для оптимизации машинное время.

Рассмотрим кратко общие идеи двух простейших методов спуска.

1. Метод покоординатного спуска.

Пусть задано первое приближение параметров $x^0 = \|x_1^0, \dots, x_n^0\|^T$, лежащее в окрестности оптимальных значений параметров, обращающих в минимум функцию $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$. Суть метода состоит в том, что параметры изменяются поочередно по одному — сначала минимизируют ошибку, изменяя только первый параметр, затем переходят к изменению второго параметра и т. д. Снова изменяют первый параметр и далее процесс циклически повторяется. Геометрически движение точки при каждом цикле изменения x_k происходит параллельно оси координат x_k , как это показано для двухмерной функции $F(x_1, x_2)$ на рис. 3.19, а.

В рассматриваемом процессе на каждом шаге имеем дело с минимизацией функции от одной переменной: за величину следующего приближения принимается абсцисса точки минимума функции $F(x_k)$. Ввиду сложности функции ошибки для оценки точки минимума используют следующий прием: задавшись тремя точками, — узлами \bar{x}_k , x'_k и x''_k , которым соответствуют значения функции $F(\bar{x}_k)$; $F(x'_k)$ и $F(x''_k)$, интерполяцией находим полином второй степени, т. е. параболу, аппроксимирующую кривую $F(x_k)$. В качестве координаты следующего приближения принимают точку минимума параболы.

Сходимость покоординатного спуска получается быстрой в тех случаях, когда оси эллипсоидов уровней направлены вдоль осей координат.

Достоинства метода покоординатного спуска состоят в его простоте и в том, что он не требует вычисления производных. Дает достаточно хороший результат в тех случаях, когда поверхности уровня близки по форме к сфере. В случае же вытянутых поверхностей уровня сходимость метода получается очень медленной, так что может потребоваться большое машинное время.

2. Методы наискорейшего (градиентного) спуска.

В методе градиентного спуска для каждой точки приближения x^k в окрестности точки минимума вычисляются частные производные функции ошибки по всем переменным непосредственным дифференцированием или с помощью конечных разностей и, следовательно, определяется градиент $G(x^k)$. В качестве направления вектора изменения переменных Δx принимается направление — G , противоположное градиенту и нормальное поверхности уровня; это направление соответствует быстрейшему убыванию функции.

Новые значения переменных в конце k -го шага определяются из соотношения

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k = x^k - \alpha^k G(x^k). \quad (3.117)$$

Здесь на каждом шаге снова получаем одномерную задачу. В качестве координат следующего приближения принимают координаты минимума функции ошибки, который имеет место в точке касания направления спуска ближайшей линии или поверхности уровня (рис. 3.19, в). Для оценки координат точки минимума можно также применить параболическую интерполяцию.

Как видим, перемещение в сторону, противоположную градиенту, производится до точки, где прекращается убывание функции ошибки. Для этой точки снова вычисляется градиент, определяющий направление нового перемещения ее.

Число необходимых шагов итерации в градиентном методе также существенно зависит от формы поверхностей уровня. В настоящее время имеется большое число других более эффективных и более сложных методов оптимизации, а также готовых программ [8], которые могут быть использованы для решения задач оптимизации с помощью ЦВМ.

Задачи

1. Задана функция времени импульсного характера в виде полупериода синусоиды:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi; \\ 0 & t > \pi. \end{cases}$$

Требуется:

1) аппроксимировать эту функцию в комплексной частотной области функцией, изображение которой имеет четвертый порядок;

2) в предположении действия на входе единичного ступенчатого сигнала найти функцию передачи цепи;

3) найти реализующую цепь, формирующую заданный импульс.

2. Требуется с помощью реактивного четырехполюсника сформировать импульс в виде трех полупериодов синусоиды:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < 3\pi; \\ 0 & t > 0. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти с помощью интерполяции в комплексной частотной области изображение аппроксимирующей функции;

2) найти реализующий реактивный четырехполюсник, формирующий заданный импульс, при действии единичного ступенчатого сигнала.

3. Требуется иметь фильтр нижних частот с максимально плоской характеристикой на следующие данные: частота среза $\omega_c = 1$; при $\omega = 2$ затухание не должно быть менее 20 дБ. Найти порядок и выражение функции передачи.

4. Требуется иметь Чебышевский фильтр для данных предыдущей задачи. Необходимо найти порядок и выражение функции передачи при допустимом затухании в полосе пропускания $a = 2$ дБ.

Глава IV

Идеальные элементы активных цепей

§ 4.1. Общие замечания

В предыдущих главах рассматривались свойства и синтез пассивных цепей, составленных из двухполюсных R -, L - и C -элементов, которые подчиняются условиям пассивности и обратимости.

В данной и следующей главе разбираются некоторые наиболее важные вопросы синтеза линейных активных цепей. Активные цепи получают при добавлении к схеме из обычных пассивных R -, L - и C -элементов (пассивной подцепи) одного или нескольких активных резистивных элементов в виде транзисторов, туннельных диодов и электронных ламп (активной подцепи), которые широко применяют в радиоэлектронике и электронике.

Наиболее характерным для активной цепи является свойство усиления мощности, состоящее в том, что мощность на выходе цепи превышает мощность подведенного сигнала. Свойство усиления снимает довольно жесткие ограничения характеристик параметров и функций цепи, вызванных пассивностью и обратимостью.

Как мы знаем, условия пассивности и обратимости существенно ограничивают допустимый вид функций и параметров двухполюсных и четырехполюсных цепей: входные функции двухполюсников должны быть положительными вещественными функциями, а матрицы z - и y -параметров четырехполюсных цепей — симметричными положительными вещественными матрицами.

Функции и параметры активной цепи, получаемой в результате внесения в пассивную цепь элементов — транзисторов или электронных ламп, не имеют указанных ограничений — входные функции активных четырехполюсников могут быть и не положительными вещественными функциями, а матрицы параметров активных четырехполюсников могут и не быть положительно вещественными матрицами.

С помощью активных цепей оказывается возможным реализовать в качестве входных функций или функций передачи любую рациональную дробь с вещественными коэффициентами с любым соотношением степеней числителя и знаменателя. В этой принципиальной возможности реализации функций более общего вида состоит одно из достоинств применения активных цепей. С практической точки зрения интерес представляет реализация устойчивых функций цепи.

Но наиболее важное достоинство активных цепей состоит в том, что они позволяют реализовать функции и параметры цепи с комп-

лексными нулями и полюсами с помощью схем, составленных только из пассивных элементов двух видов: R и C (активного сопротивления и емкости), в сочетании с активными элементами.

Функции цепи и параметры с комплексными полюсами при использовании пассивных цепей, как мы видели, реализуются схемами, содержащими непременно три вида элементов: R , L и C . Пассивные цепи из RC (или RL)-элементов могут иметь функции только с вещественными отрицательными полюсами. Роль активного элемента и состоит в перемещении полюсов с вещественной отрицательной полуоси в любую точку плоскости комплексной частоты.

Возможность реализации функций цепи с помощью активных цепей без индуктивностей имеет исключительно важное значение, так как индуктивность для очень широкого класса практических схем является нежелательным элементом по следующим соображениям:

1. Изготовление индуктивности по широко применяемой в радиоэлектронике, так называемой, интегральной технологии невозможно.

2. Большие значения индуктивностей с необходимой достаточно высокой добротностью, которые требуются при низких частотах, используемых в акустике, автоматике и других областях техники, трудно осуществить практически при допустимых малых габаритах и весах.

В этой и последующих главах будем рассматривать синтез активных цепей без индуктивностей, состоящих из пассивной RC -подцепи и активных элементов.

Свойства и реализация пассивных RC -цепей изложены в предыдущих главах, поэтому ближайшая задача состоит в рассмотрении активных элементов, которые являются основными элементами активных цепей.

Реальными устройствами, с помощью которых на практике строится линейная активная цепь, являются транзисторы, туннельные диоды и электронные лампы, работающие в режиме малых сигналов. Из них наибольшее применение находят транзисторы, представляющие трехполюсные элементы.

Недостаток, присущий активным элементам, состоит в том, что их параметры и характеристики недостаточно стабильны — могут меняться в довольно широких пределах под действием температуры, непостоянства напряжения источника питания и т. д. В результате характеристики цепи будут также изменяться. Относительное изменение характеристик цепи при изменении параметра активного элемента, называемое чувствительностью цепи, получается большим. Поэтому проблема обеспечения допустимой минимальной чувствительности приобретает решающее значение в синтезе активных RC -цепей.

Другая важная проблема связана с возможной неустойчивостью активных цепей. Для нормальной работы линейной активной цепи необходимо исследовать устойчивость режима и применять соответствующие меры по ее обеспечению.

Следует остановиться на важной особенности постановки задачи реализации функций активных цепей, которая определит характер последующего изложения.

Схемы замещения реальных активных элементов, таких как туннельный диод или транзистор даже в линейном режиме, имеют сложный вид. На рис. 4.1, *а* приведена линейная схема замещения транзистора для режима малых сигналов и невысоких частот, а на рис. 4.1, *б* — схема туннельного диода, также для малых амплитуд сигнала, когда режим не выходит за пределы спадающего участка характеристики прибора. Схемы кроме обычных пассивных двухполюсных R -, L - и C -элементов содержат также идеальные активные элементы: двухполюсный резистивный элемент с отрицательным сопротивлением ($-R$) и четырехполюсный резистивный элемент в виде управляемого источника тока, ток которого пропорционален току эмиттерной ветви.

При реализации заданных функций входного сопротивления или функций передачи с помощью активных цепей практически невозможно получить сосредоточенный в одном месте набор элементов, имеющий вид приведенных схем замещения, даже существенно упрощенных и, следовательно, менее точных, которые затем могли бы быть заменены транзисторами или туннельными диодами. Поскольку реализация, приводящая непосредственно к реальным активным элементам, исключается, то применяется следующий метод реализации функций активных цепей. Вводятся идеальные активные элементы, двухполюсные и четырехполюсные, которым предписываются простейшие свойства и характеристики. Характеристики, с одной стороны, должны быть такими, чтобы цепи с идеальными элементами в сочетании с обычными пассивными элементами позволяли без особых затруднений реализовать заданные функции цепи. С другой стороны, характеристики должны допускать приближенное осуществление идеальных элементов с помощью схем, составленных из реальных активных элементов и обычных пассивных элементов.

Введение идеальных активных элементов упрощает и систематизирует процесс реализации заданных функций или системы параметров цепи с помощью активных цепей.

В настоящее время наибольшую известность получили следующие идеальные активные элементы:

1. Двухполюсный активный элемент в виде отрицательного активного сопротивления.

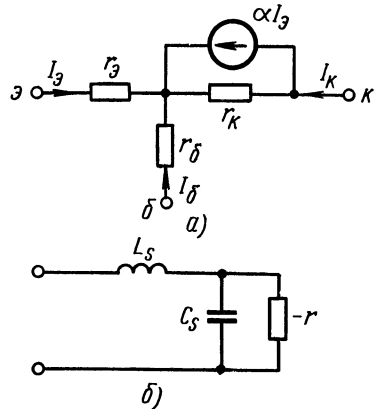


Рис. 4.1

2. Четырехполюсный активный элемент в виде управляемого источника напряжения или тока.

3. Четырехполюсный активный элемент, называемый операционным усилителем, который представляет идеальный усилитель напряжения с бесконечным усилением.

4. Четырехполюсный активный элемент, называемый конвертором отрицательного сопротивления.

5. Четырехполюсный элемент, называемый гиратором.

В этой главе будут изложены данные о свойствах и характеристиках перечисленных активных элементов, кроме первого — элемент в виде отрицательного активного сопротивления не будет рассматриваться. Указанные элементы, кроме гиратора, обладают свойством активности — суммарная мощность, подведенная ко всем входам цепи, отрицательна. Кроме того, все элементы, за исключением первого ($-R$ -элемента), являются необратимыми или не взаимными. Изложение начнем с введения особых двухполюсных элементов — нулаторов и нораторов, которые облегчают и систематизируют процесс приближенного перевода схем идеальных активных элементов в схемы, содержащие транзисторы и пассивные элементы.

В нашу задачу не входит систематическое рассмотрение всех возможных транзисторных реализаций отдельных идеальных элементов, число которых может быть значительным. Такое рассмотрение с выбором наилучших транзисторных реализаций требует специального анализа. Поэтому ограничимся приведением лишь некоторых примеров транзисторных реализаций идеальных четырехполюсных активных элементов.

§ 4.2. Нулаторы и нораторы

В синтезе активных цепей весьма полезно введение двух вырожденных, или особых, двухполюсных элементов — нулаторов и нораторов. Оба элемента могут быть отнесены к классу резистивных элементов, так как их свойства полностью определяются связью между напряжением и током, т. е. вольт-амперной характеристикой. Эта связь принята весьма своеобразной и необычной, ее не может иметь ни один физический объект.

Нулатор, символическое изображение которого дано на рис. 4.2, *а*, имеет ток и напряжение, одновременно равные нулю:

$$I = 0; U = 0. \quad (4.1)$$

Элемент, следовательно, объединяет в себе характеристики как разрыва (холостого хода), так и короткого замыкания.

Вольт-амперная характеристика нулатора на плоскости $u - i$ будет изображаться точкой в начале координат (рис. 4.2, *б*).

Норатор, символическое изображение которого дано на рис. 4.2, *в*, имеет ток и напряжение, независимо друг от друга принимающие произвольные значения.

Вольт-амперная характеристика норатора на плоскости $u-i$ будет представляться произвольной точкой с любой комбинацией проекций на оси координат, т. е. напряжения и тока (рис. 4.2, z).

Не существует реального устройства, характеристики которого в какой-то мере приближались бы к сформулированным свойствам каждого из особых элементов. Поэтому нулатор и норатор невозможно получить идеализацией физического прообраза, как это делается при введении обычных элементов цепи.

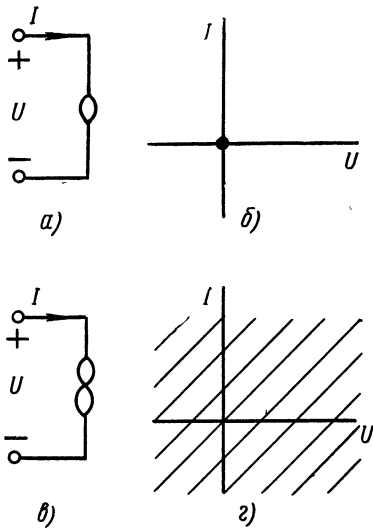


Рис. 4.2

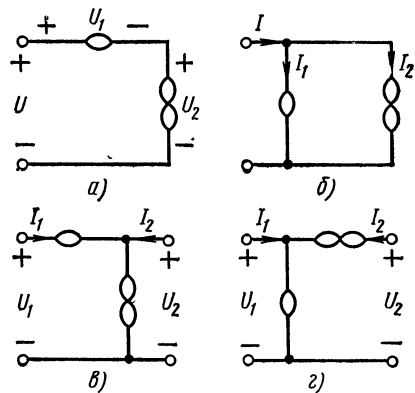


Рис. 4.3

Справедливо обратное положение: рассматриваемый отдельно каждый из особых элементов в любой комбинации с обычными элементами не может обладать свойствами, близкими к свойствам реального устройства.

Но если особые элементы входят в цепь попарно так, что число нулаторов равно числу нораторов, то в комбинации с другими элементами они могут, как будет показано ниже, передать характеристики любых идеализированных активных элементов.

Ток и напряжение нулатора одинаковы — оба равны нулю, также как ток и напряжение норатора — оба имеют произвольные значения. Отсюда следует, что элементом, дуальным нулатору, является также нулатор, а элементом, дуальным норатору, — норатор.

Рассмотрим простейшие двухполюсные и четырехполюсные схемы, содержащие пару нулатор — норатор.

1. Последовательное соединение нулатора и норатора (рис. 4.3, a).

Напряжение ветви, равное сумме напряжений на нулаторе ($U_1=0$) и нораторе (U_2 — любое), будет произвольным. Ток ветви определяется током нулатора, соответствующим разрыву, и равен нулю, так что

$$I = 0; U - \text{произв.}$$

Как видим, рассматриваемая ветвь эквивалентна разрыву (холостому ходу).

Ветвь из последовательно соединенных нулятора и норатора, представляющая разрыв, может быть присоединена, очевидно, между любыми двумя точками цепи без изменения свойств цепи. Такое включение широко используется, как увидим дальше, для получения новых нуляторно-нораторных схем.

2. Параллельное соединение нулятора и норатора (рис. 4.3, б).

Ток ветви, равный сумме токов нулятора ($I_1=0$) и норатора (I_2 — любой), будет иметь произвольное значение.

Напряжение ветви определяется напряжением нулятора, соответствующего короткому замыканию, и будет равно нулю:

$$U=0; I — \text{произв.}$$

Рассматриваемая ветвь эквивалентна короткому замыканию.

Ветвь из параллельно соединенных нулятора и норатора, представляющая короткое замыкание, может включаться в рассечку любого соединительного проводника без изменения свойств цепи. Такое включение также используется с целью получения новых нуляторно-нораторных схем.

3. Четырехполюсная Г-образная схема (рис. 4.3, в) с последовательной ветвью из нулятора и параллельной ветвью из норатора.

Входной ток, определяемый нулятором, равен нулю; выходное напряжение (на нораторе), произвольное по значению, очевидно, равно входному напряжению, так как падение напряжения на нуляторе равно нулю. Выходной ток, замыкающийся через норатор, может иметь любое значение в зависимости от сопротивления нагрузки, присоединенной к выходу.

Уравнения рассматриваемой схемы можем, следовательно, записать как

$$I_1=0; U_2=U_1. \quad (4.2)$$

Эти соотношения соответствуют уравнениям так называемого идеального усилителя напряжения с единичным коэффициентом усиления. Свойства идеального усилителя напряжения, представляющего четырехполюсный активный элемент, излагаются в следующем параграфе.

4. Четырехполюсная схема, дуальная предыдущей схеме, состоит из параллельной ветви — нулятора и последовательной ветви — норатора (рис. 4.3, г).

Входное напряжение (на нуляторе) равно нулю; выходной ток, замыкающийся через норатор и нагрузку, равен по величине входному току. Уравнения схемы, следовательно, запишутся как

$$U_1=0; I_2=-I_1. \quad (4.3)$$

Эти равенства соответствуют уравнениям так называемого идеального усилителя тока с единичным коэффициентом усиления. Свойства идеального усилителя тока — четырехполюсного активного элемента — приводятся дальше.

В последующих параграфах будем рассматривать нулаторно-нораторные схемы замещения различных идеальных активных элементов. Как указывалось, основной смысл таких схем замещения состоит в том, что по ним легко получить приближенную транзисторную или ламповую реализацию активных элементов. При этом несложными манипуляциями со схемами можно охватить множество вариантов реализаций с различным числом транзисторов и ламп.

Для перехода к схемам с реальными элементами необходимо иметь простейшие нулаторно-нораторные схемы транзисторов и ламп. Такие схемы можно получить только приближенно, пренебрегая рядом паразитных параметров, которые всегда имеются у реальных элементов.

Простейшую схему замещения транзистора с общей базой (рис. 4.4, а) можно получить, если принять следующие допущения: ток базы $i_6 \approx 0$ и коэффициент усиления по току в режиме короткозамкнутого выхода $\alpha = (i_k / -i_3) \approx 1$; сопротивления эмиттера и базы $r_3 \approx 0$; $r_6 \approx 0$; сопротивление коллектора $r_k = \infty$.

При указанных допущениях известная Т-образная транзисторная схема замещения (рис. 4.1, а) переходит в схему идеального усилителя тока с коэффициентом усиления $K_I = 1$ (см. рис. 4.7, е). Следовательно, транзистор можно приближенно представить нулаторно-нораторной схемой, изображенной на рис. 4.3, г. Эта схема воспроизведена на рис. 4.4, б.

Из сопоставления схемы включения транзистора и ее нулаторно-нораторной схемы заключаем, что выводу эмиттера соответствует точка соединения пары нулатор — норатор, выводам базы и коллектора — свободные выходы нулатора и норатора.

Приведенная трехполосная нулаторно-нораторная схема (рис. 4.4, б) при соответствующих соединениях ее выводов пригодна также для представления транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером или общим коллектором.

Если цепь содержит элементы в виде нулаторов и нораторов, то каждая пара нулатор — норатор, имеющая общий узел, может быть заменена транзистором, включенным так, что точка соединения вырожденных элементов является эмиттером, а свободные выходы нулатора и норатора — соответственно базой и коллектором.

В качестве примера построим транзисторные схемы для цепей, содержащих наряду с резистивными элементами пару нулатор — норатор (рис. 4.5, а). Поскольку у каждой пары выходы нулатора и норатора имеют общий узел, т. е. соединены между собой, то в соответствии с изложенным правилом сразу получаем транзисторную схему, которая изображена на рис. 4.5, б.

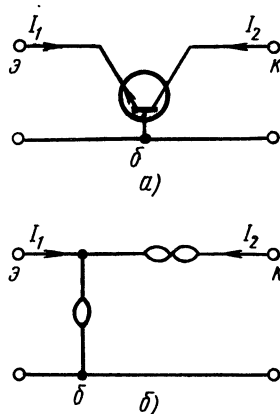
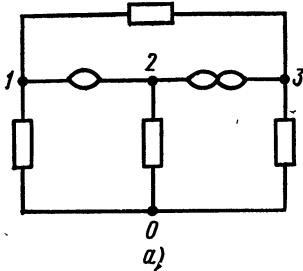


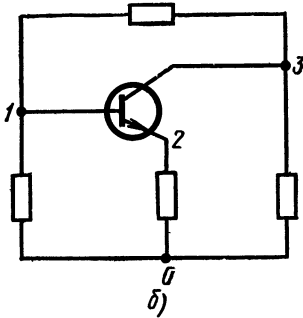
Рис. 4.4

Если нулатор и норатор появляются в разных частях цепи и их выводы не соединены между собой непосредственно, как это показано на примере цепи рис. 4.6, а, то транзисторную схему все же можно получить, соединяя между собой выводы обоих вырожденных элементов ветвью из последовательного соединения нулатора и норатора. Такая ветвь эквивалентна разрыву и не вносит каких-либо изменений в цепь.

Элементы в указанной ветви располагаются таким образом, чтобы получить две самостоятельные пары нулатор — норатор, каждая из которых может быть заменена транзистором.

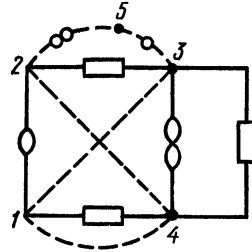


а)

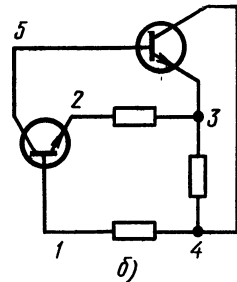


б)

Рис. 4.5



а)



б)

Рис. 4.6

Пару выводов нулатора и пару выводов норатора, имеющих в схеме, можно соединить между собой ветвью из последовательно соединенных двух особых элементов четырьмя различными способами. Соответственно получатся четыре комбинации пар нулатор — норатор и четыре варианта транзисторных схем. На рис. 4.6, а возможные соединения выводов двух особых элементов ветвью из последовательных элементов — нулатора и норатора — показаны пунктирными линиями. Одна из возможных эквивалентных транзисторных схем изображена на рис. 4.6, б.

Из ряда реализующих транзисторных схем следует выбрать одну, наилучшим образом удовлетворяющую предъявляемым требованиям. Сравнение производится по результатам анализа цепей при замещении транзисторов более точными схемами с учетом сопротивлений эмиттера и базы и действительного значения $\alpha < 1$.

§ 4.3. Управляемые источники

Управляемые источники или идеальные усилители можно получить идеализацией реальных четырехполюсных устройств — усилителей удалением всех паразитных параметров при сохранении основного свойства — свойства усиления сигнала.

Обозначим через F_1 и F_2 входную и выходную величины, каждая из которых может быть током или напряжением.

Управляемым источником (идеальным услителем) называют активный четырехполюсник со следующими свойствами: 1) выходная или управляемая величина F_2 пропорциональна входной или управляющей величине F_1 : $F_2 = kF_1$, где k — вещественная

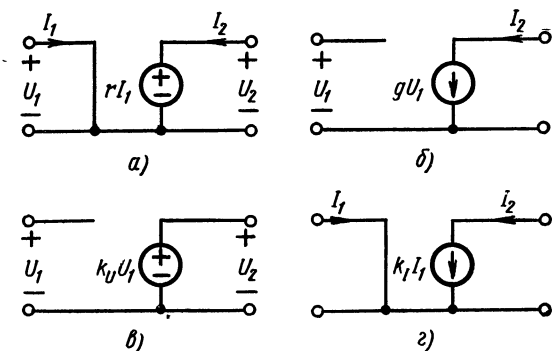


Рис. 4.7

положительная величина — управляющий параметр; 2) входная управляющая величина не зависит от выходной управляемой величины, так что нет передачи сигнала от выхода к входу. Подобный элемент с передачей энергии только в одном направлении — от входа к выходу называют *односторонним* или *однонаправленным* элементом.

В зависимости от размерностей входной и выходной величин различают следующие четыре типа управляемых источников, схемы и символические обозначения которых приведены на рис. 4.7.

1. *Управляемый током источник напряжения* (рис. 4.7, а).

Управляющей величиной является ток $F_1 = I_1$, а управляемой — напряжение $F_2 = U_2$. Выходное напряжение элемента пропорционально входному току, а входное напряжение равно нулю. Уравнения элемента, следовательно:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0; \\ U_2 &= rI_1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Управляющий параметр $k = r$ является передаточным сопротивлением z_{21} . Источник напряжения, управляемый током, может рассматриваться как преобразователь, который преобразует ток входа в напряжение выхода и будет обозначаться сокращенно ИНУТ.

Матрица сопротивлений элемента согласно уравнениям (4.4)

$$z = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

Из выражения матрицы, а также из схемы (рис. 4.7, а) видно, что как входное, так и выходное сопротивления управляемого током источника напряжения равны нулю.

2. *Управляемый напряжением источник тока* (рис. 4.7, б).

Управляющей величиной является напряжение $F_1 = U_1$, а управляемой — ток $F_2 = I_2$. Выходной ток элемента пропорционален входному напряжению, а входной ток равен нулю. Уравнения элемента, следовательно, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0; \\ I_2 &= gU_1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Управляющий параметр $k = g$ является передаточной проводимостью $y_{21} = g$. Источник тока, управляемый напряжением, может рассматриваться как преобразователь, преобразующий напряжение входа в ток выхода и будет обозначаться сокращенно ИТУН.

Матрица проводимостей элемента в соответствии с (4.6)

$$y = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Из выражения матрицы, а также схемы (рис. 4.7, б) видно, что входное и выходное сопротивления элемента имеют бесконечно большие значения.

3. *Управляемый напряжением источник напряжения, или идеальный усилитель напряжения* (рис. 4.7, в).

Как управляющей, так и управляемой величинами являются напряжения: $F_1 = U_1$ и $F_2 = U_2$.

Выходное напряжение элемента пропорционально напряжению на входе; входной ток равен нулю. Уравнения элемента

$$\begin{aligned} I_1 &= 0; \\ U_2 &= K_U U_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Управляющий параметр $K_U = U_2/U_1$ является безразмерным коэффициентом усиления напряжения. Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), изменяет уровень напряжений и может рассматриваться как преобразователь напряжения в напряжение.

Уравнениям (4.8) соответствует гибридная g -матрица вида

$$g = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ K_U & 0 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

Из смысла элементов g -матрицы, а также схемы элемента (рис. 4.7, в) следует, что входное сопротивление бесконечно велико, а выходное сопротивление равно нулю.

Для идеального усилителя напряжения, представляющего направленный элемент с передачей сигнала только от входа к выходу, применяю также символическое обозначение в виде треугольника (рис. 4.8, а).

4. Управляемый ток источник тока, или идеальный усилитель тока (рис. 4.7, з).

Как управляющей, так и управляемой величинами являются токи: $F_1=I_1$ и $F_2=I_2$. Выходной ток пропорционален току на входе; входное напряжение равно нулю. Уравнения элемента, следовательно:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0; \\ I_2 &= K_I I_1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Управляющий параметр $K_I = I_2/I_1$ является безразмерным коэффициентом усиления тока. Источник тока, управляемый током (ИТУТ), может рассматриваться как преобразователь тока в ток.

Параметры уравнений можно записать в виде гибридной матрицы:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_I & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Из смысла параметров h -матрицы или схемы усилителя (рис. 4.7, з) следует, что входное сопротивление равно нулю, а выходное бесконечно велико.

Приведенные четыре управляемых источника и их схемы (рис. 4.7, а, б, в и з) являются попарно взаимно дуальными: ИНУТ и ИТУН; ИНУН и ИТУТ, в чем нетрудно убедиться, рассматривая уравнения (4.4) и (4.6) и уравнения (4.8) и (4.10), а также рис. 4.7, а, б и в, з.

Основными из четырех элементов можно считать первые два дуальных элемента: управляемый ток источник напряжения и управляемый напряжением источник тока. Остальные два элемента можно получить каскадным соединением первых двух элементов.

Если к выходу управляемого напряжением источника тока подключить управляемый ток источник напряжения (рис. 4.8, б), то результирующая цепь будет представлять идеальный усилитель напряжения с коэффициентом усиления $K_U = gr$.

Если к выходу управляемого ток источник напряжения включить управляемый напряжением источник тока (рис. 4.8, в), то результирующая цепь будет представлять идеальный усилитель тока с коэффициентом усиления $K_I = rg$.

Отметим некоторые общие свойства введенных элементов.

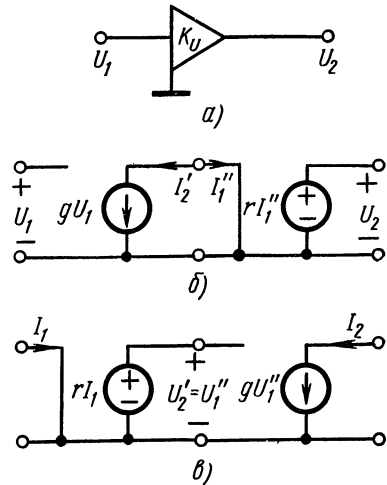


Рис. 4.8

Мощность, подводимая от источника сигнала, присоединенного к входу любого из четырех идеальных источников, равна нулю, поскольку вход элемента, управляемого напряжением, представляет разрыв, и входной ток равен нулю, а вход элемента, управляемого током, представляет короткое замыкание, и входное напряжение равно нулю.

Общая потребляемая элементом мощность равна мощности управляемого источника напряжения или тока в выходном контуре и поэтому отрицательна. Следовательно, управляемый источник является активным элементом.

Из рассмотрения приведенных матриц параметров следует, что передаточные сопротивления и проводимости равны:

$$\begin{aligned} z_{21} = r \neq z_{12} = 0; & \quad g_{21} = K_U \neq -g_{12} = 0; \\ y_{21} = g \neq y_{12} = 0; & \quad h_{21} = K_I \neq -h_{12} = 0. \end{aligned}$$

Как видим, параметры элементов не удовлетворяют условиям обратимости. Следовательно, управляемые источники являются необратимыми четырехполюсными элементами.

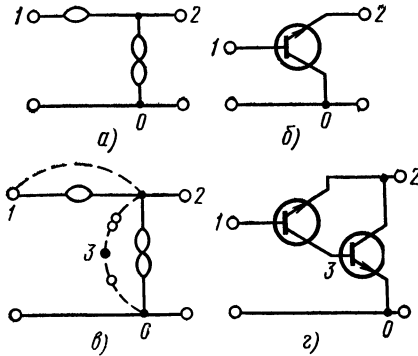


Рис. 4.9

Рассмотрим теперь примеры практической реализации идеальных управляемых источников с помощью транзисторных схем. Как указывалось в предыдущем параграфе, различные варианты реализующих транзисторных схем удобно получать с помощью нулаторно-нораторных схем.

Остановимся сначала на схеме ИНУН с единичным коэффициентом усиления. На рис. 4.9, а воспроизведена рассмотренная

в § 4.2 простейшая нулаторно-нораторная схема. Приняв в соответствии со сказанным свободные выводы нулатора и норатора за базу и коллектор, а узел между обоими элементами за эмиттер, получим схему (рис. 4.9, б) из одного транзистора с общим коллектором (эмиттерный повторитель).

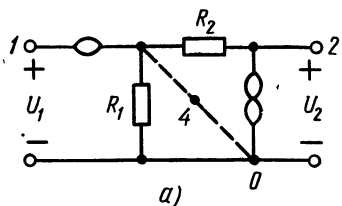
Можно получить схему с двумя транзисторами, соединяя выводы нулатора и норатора ветвью из последовательного соединения указанных элементов. В частности, для соединения, показанного на рис. 4.9, в, при выполнении упомянутой идентификации выводов особых элементов, получается схема с двумя транзисторами, изображенная на рис. 4.9, г.

Если между нулатором и норатором схемы усилителя с $K_U=1$ (см. рис. 4.9, а) ввести делитель выходного напряжения из резисторов R_1 и R_2 (рис. 4.10, а), то получим идеальный усилитель напряжения с $K_U > 1$. Действительно, входной ток, определяемый нулатором, равен нулю, а входное напряжение равно, как видно

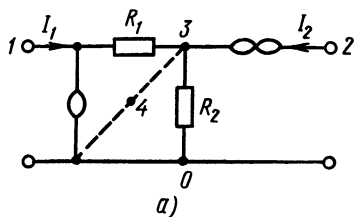
из схемы, напряжению, на резисторе R_1 : $U_1 = U_2 R_1 / R_1 + R_2$, так что

$$K_U = U_2 / U_1 = 1 + R_2 / R_1. \quad (4.12)$$

При $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow 0$ приходим к исходной схеме с $K_U = 1$. Поскольку нулатор и норатор не соединены между собой непосредственно, то реализующая схема будет содержать два транзистора.



а)



а)

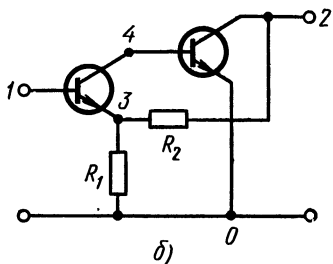


Рис. 4.10

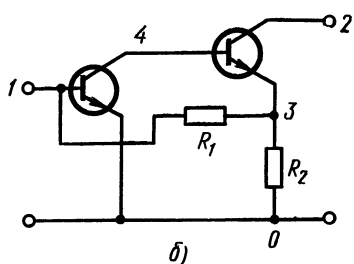


Рис. 4.11

Одна из возможных схем, соответствующая показанному на рис. 4.10, а соединению ветви из нулатора и норатора, приведена на рис. 4.10, б.

На рис. 4.11, а изображена нулаторно-нораторная схема идеального усилителя тока, дуальная схема рис. 4.10, а. Одна из возможных схем с двумя транзисторами изображена на рис. 4.11, б.

Аналогичным образом можно получить множество других приближенных транзисторных реализаций как идеальных усилителей напряжения и тока, так и двух других управляемых источников. Выбор наилучшей из схем производится по результатам подробного анализа всех схем на основе сравнения важнейших характеристик (точности, устойчивости, чувствительности и т. п.).

§ 4.4. Операционный усилитель

Операционным усилителем (ОУ) называют управляемый источник напряжения с бесконечным управляющим параметром или идеальный усилитель напряжения с бесконечным коэффициентом усиления ($K_U \rightarrow \infty$). Входное сопротивление ОУ бесконечно велико, а выходное — равно нулю.

На рис. 4.12, а, б представлено условное изображение операционного усилителя дифференциального типа, имеющего два входных вывода (1, 2) и один выходной вывод (3). Вывод 1 входа, отмеченный знаком «-», называют инвертирующим — полярность приложенного к нему управляющего напряжения U_1 обратна полярности выходного напряжения. Вывод 2 входа, отмеченный знаком «+», называют неинвертирующим — полярность его управляющего напряжения U_2 одинакова с полярностью U_3 .

Результирующее управляющее входное напряжение операционного усилителя равно разности двух напряжений, приложенных

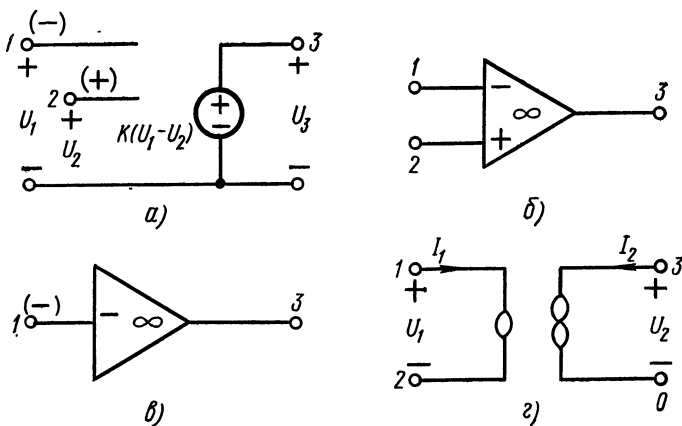


Рис. 4.12

к обоим управляющим выводам. Поэтому выходное напряжение

$$U_3 = K_U (U_1 - U_2) \quad (K_U \rightarrow \infty). \quad (4.13)$$

Так как $K_U \rightarrow \infty$, то при конечном выходном напряжении величина управляющего напряжения $(U_1 - U_2) \rightarrow 0$. Это обстоятельство можно использовать для облегчения анализа схем, содержащих ОУ.

Выражение (4.13) соответствует включению ОУ с использованием обоих входных выводов по так называемой схеме дифференциального усиления, когда на входе сравниваются два напряжения и выходное напряжение пропорционально их разности.

Операционный усилитель может также использоваться в схеме с одним управляющим выводом, когда второй вывод входа заземляется. На рис. 4.12, в показана схема инвертирующего ОУ с использованием входного вывода 1 и заземлением вывода 2.

Реальные ОУ имеют конечный, но все же очень высокий коэффициент усиления порядка 10^5 , так что и здесь при расчетах схемы можно с достаточной точностью принимать напряжение на входе $(U_1 - U_2) \approx 0$.

Полоса пропускания, т. е. полоса частот, где усиление почти постоянно, также конечна: она простирается от 0 до f_{\max} , где

f_{\max} лежит в пределах нескольких мегагерц. Поскольку нижняя граница полосы включает нулевую частоту, то ОУ является усилителем постоянного тока. Входное сопротивление составляет десятки мегом, а выходное — доли ома.

Операционные усилители выпускаются промышленностью серийно на основе современной интегральной технологии. Поэтому ОУ можно рассматривать как самостоятельный активный элемент цепи наряду с транзистором или электронной лампой. Большое достоинство ОУ состоит в том, что с их помощью можно построить схемы других активных элементов.

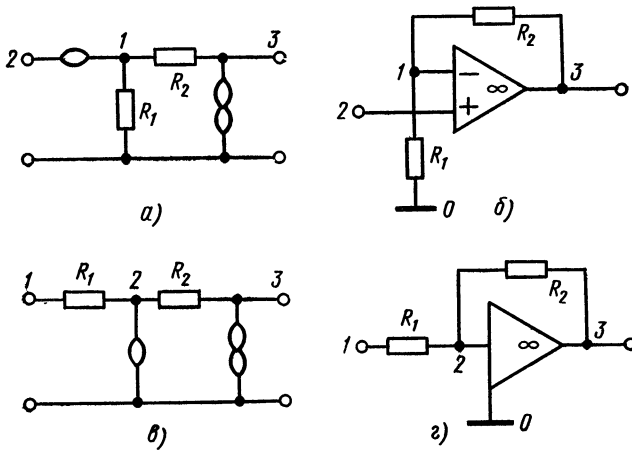


Рис. 4.13

В линейных цепях применяют операционные усилители всегда с отрицательной обратной связью, улучшающей их характеристики.

Изложенные характеристики идеального ОУ, именно — нулевые напряжение и ток входа и произвольные напряжение и ток выхода, можно представить четырехполюсной схемой из пары нулатор — норатор (рис. 4.12, *з*), называемой нулором. Выводы нулатора и норатора представляют выводы входа и выхода ОУ.

Параметры передачи нулорной схемы, так же как и параметры передачи идеального ОУ, будут равны нулю: $a_{ik} = 0$. Этот вывод следует из того, что параметры a_{ik} определяются как отношения [см. дальше (4.15)] входного напряжения или входного тока, которые равны нулю, к напряжению или току выхода в режиме короткого замыкания или разрыва.

На основе приведенной нулорной схемы ОУ можно получить схемы, реализующие различные активные элементы.

Покажем возможность получения с помощью ОУ усилителей напряжения (ИНУН) с конечным коэффициентом усиления.

Если взять за основу рассмотренную ранее нулаторно-нораторную схему инвертирующего ИНУН (рис. 4.13, *а*), то нетрудно

получить схему с одним ОУ и обратной связью, показанную на рис. 4.13, б. Соответственные точки обеих схем отмечены одинаковыми цифрами. Полагая ОУ идеальным с нулевыми напряжением и током на входе, видим, что в сопротивлениях R_1 и R_2 токи одинаковы, а напряжения на них равны: $U_1 = R_1 I$; $U_2 = -R_2 I$. Коэффициент усиления

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Входное сопротивление усилителя равно R_1 , величина которого должна быть достаточно большой. Выходное сопротивление определяется выходным сопротивлением ОУ.

Для нулаторно-нораторной схемы неинвертирующего ИНУН, показанной на рис. 4.13, в, получим схему с ОУ и обратной связью, изображенную на рис. 4.13, г. Приняв ОУ идеальным, у которого входное напряжение и входной ток равны нулю, сразу видим, что в сопротивлениях R_1 и R_2 устанавливается ток $U_2/R_1 + R_2$. Напряжение на R_1 равно напряжению U_1 . Следовательно, коэффициент усиления

$$K_U = (R_1 + R_2)/R_1 > 1.$$

Аналогичным образом можно получить реализацию с помощью операционных усилителей других типов управляемых источников.

§ 4.5. Конвертор отрицательного сопротивления

Конвертор отрицательного сопротивления (КОС) представляет активный четырехполюсный элемент со следующим свойством: при включении на выходе (рис. 4.14, а) нагрузочного сопротивления $Z_H(s)$ входное сопротивление эле-

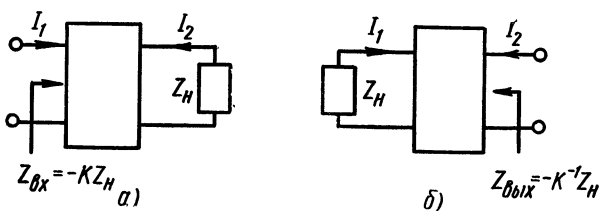


Рис. 4.14

мента пропорционально сопротивлению нагрузки с обращением знака:

$$Z_{\text{вх}}(s) = -K Z_H(s). \quad (4.14)$$

Коэффициент K , называемый коэффициентом конверсии, в общем случае может быть функцией комплексной частоты $K = K(s)$. Мы будем рассматривать конвертор с вещественным коэффициентом конверсии, называемый идеальным.

Как видно из (4.14), идеальный конвертор отрицательного сопротивления сохраняет выражение сопротивления $Z_n(s)$, но меняет его знак на обратный, т. е. на отрицательный.

Если в частном случае на выходе КОС подключить отдельные пассивные элементы: резистор, емкость и индуктивность, то на входе получим элементы: $-R$, $-C$ и $-L$.

Запишем уравнения четырехполюсника через параметры передачи (обобщенные параметры) для положительных направлений токов и напряжений, указанных на рис. 4.14, а:

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2); \\ I_1 &= a_{21}U_2 - a_{22}(-I_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь параметры передачи определяются из режимов короткого замыкания и холостого хода:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (U_1/U_2)_{I_2=0}; & a_{12} &= (U_1/-I_2)_{U_2=0}; \\ a_{21} &= (I_1/U_2)_{I_2=0}; & a_{22} &= (I_1/-I_2)_{U_2=0}. \end{aligned}$$

Взяв отношение уравнений, найдем выражение входного сопротивления произвольного четырехполюсника с нагрузкой Z_n через параметры передачи

$$Z_{\text{вх}} = \frac{a_{11}Z_n + a_{12}}{a_{21}Z_n + a_{22}}. \quad (4.16)$$

Для выполнения условия (4.14) конверсии сопротивления необходимо положить в (4.16)

$$a_{12} = 0; \quad a_{21} = 0; \quad a_{11} \neq 0; \quad a_{22} \neq 0. \quad (4.17)$$

Уравнения конвертора отрицательного сопротивления запишутся через параметры передачи:

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}U_2; \\ I_1 &= a_{22}(-I_2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Переписав эти соотношения, получим уравнения КОС через g -параметры:

$$\begin{aligned} I_1 &= -a_{22}I_2 = g_{12}I_2; \\ U_2 &= \frac{1}{a_{11}}U_1 = g_{21}U_1. \end{aligned}$$

Гибридные параметры рассматриваемого элемента:

$$g_{11} = g_{22} = 0; \quad g_{12} = -a_{22}; \quad g_{21} = 1/a_{11}.$$

Входное сопротивление конвертора с присоединенной на выходе нагрузкой $Z_n = U_2/-I_2$ с учетом (4.17)

$$Z_{\text{вх}} = \frac{a_{11}}{a_{22}}Z_n = -KZ_n = \frac{1}{-g_{12}g_{21}}Z_n. \quad (4.19)$$

Отсюда следует, что отношение a -параметров должно быть вещественным отрицательным, а произведение g -параметров вещественным положительным:

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} = -K < 0; \quad g_{12}g_{21} = K > 0. \quad (4.20)$$

Для выполнения данного условия a -параметры должны быть вещественными, но разного знака.

Возможны два случая:

$$1. a_{11} = \frac{1}{g_{21}} = 1; a_{22} = -g_{12} = -K^{-1} < 0.$$

Здесь коэффициент усиления по напряжению (a_{11}^{-1}) принят равным единице.

Матрица параметров передачи с учетом (4.17)

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -K^{-1} \end{vmatrix}. \quad (4.21)$$

Соответствующие уравнения четырехполосника — конвертора:

$$U_1 = U_2; I_1 = -K^{-1}(-I_2). \quad (4.22)$$

Напряжения на входе и выходе конвертора одинаковы по величине и совпадают по фазе. Токи на входе и выходе обратны по знаку — находятся в противофазе и отличаются по величине в K раз, так что величина K является коэффициентом усиления по току.

Конвертор с обращением знака или фазы тока (в синусоидальном режиме) называют конвертором отрицательного сопротивления с инверсией тока, или конвертором токового типа (КОСТ).

$$2. a_{22} = -g_{12} = 1 > 0; a_{11} = g_{21}^{-1} = -K < 0.$$

Здесь коэффициент усиления по току (a_{22}^{-1}) принят равным единице.

Матрица параметров передачи при учете (4.17)

$$\mathbf{a}' = \begin{vmatrix} -K & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.23)$$

Уравнения конвертора:

$$U_1 = -KU_2; I_1 = (-I_2). \quad (4.24)$$

Токи на входе и выходе равны по величине и совпадают по фазе. Напряжения на входе и выходе обратны по знаку — находятся в противофазе и отличаются по величине в K раз — величина K играет роль коэффициента усиления по напряжению. Конвертор с обращением знака или фазы напряжения называют конвертором отрицательного сопротивления с инверсией напряжения (КОСН).

Выясним некоторые общие свойства идеального КОС.

Рассмотрим сопротивление КОС со стороны выхода при подключении к выводам входа нагрузочного сопротивления $Z_H(s)$ (рис. 4.14, б). Выходное сопротивление четырехполосника через параметры передачи выражается следующим образом:

$$Z_{\text{вых}} = \frac{a_{22}Z_H + a_{12}}{a_{21}Z_H + a_{11}}. \quad (4.25)$$

В случае идеального КОС, параметры которого удовлетворяют условиям (4.17), будем иметь

$$Z_{\text{вых}} = \frac{a_{22}}{a_{11}} Z_{\text{н}}(s) = -\frac{1}{K} Z_{\text{н}}. \quad (4.26)$$

Как видим, КОС изменяет знак сопротивления как от выхода к входу, так и от входа к выходу.

Найдем величину мощности, потребляемой КОС с вещественными параметрами. Для КОС токового типа согласно уравнениям (4.22) имеем

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 (1 - 1/K).$$

При $(1/K) > 1$ мощность отрицательна и КОС является активным элементом.

Определитель матрицы параметров передачи (4.21) $\det a = -K \neq 1$, а определитель матрицы (4.23) $\det a' = -1/K \neq 1$. Отсюда заключаем, что конверторы отрицательного сопротивления являются необратимыми четырехполосниками. Этот же вывод следует из того, что не выполняется условие обратимости через гибридные параметры: $g_{12} \neq -g_{21}$.

У реальных схем конверторов параметры: $g_{11} \neq 0$ и $g_{22} \neq 0$, так что матрица g -параметров будет содержать все четыре элемента. Указанные паразитные параметры КОС могут быть скомпенсированы включением резистивных двухполосников на входе и выходе КОС.

Покажем идею компенсации на примере конвертора токового типа. Параметр $g_{11} \neq 0$ можно представить проводимостью g_{11} , включенной параллельно входу идеального КОС (рис. 4.15, а). Для компенсации этой положительной проводимости следует включить на выходе конвертора проводимость Kg_{11} . В результате конверсии со стороны входа эта проводимость получит значение $-g_{11}$ и тем самым скомпенсирует паразитную проводимость.

Параметр g_{22} имеет размерность сопротивления и для его компенсации необходимо последовательно входу КОС включить сопротивление $K^{-1}g_{22}$ (рис. 4.15, б). Возможность компенсации паразитных параметров и приведения элемента к идеальному конвертору является достоинством КОС.

Перейдем к составлению схем замещения КОС с помощью управляемых источников.

Уравнениям (4.22) конвертора с инверсией тока, как нетрудно убедиться, соответствует схема, изображенная на рис. 4.16, а. Схема состоит из продольной короткозамкнутой перемычки между верхними выводами входа и выхода, обеспечивающей равенство напряжений $U_1 = U_2$, и поперечной ветви из источника тока, управляемого током выхода с управляющим параметром $K+1$.

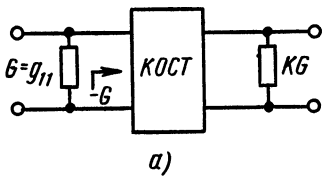
Входной ток схемы

$$I_1 = -I_2 + (K+1)I_2; \quad I_1 = K^{-1}I_2. \quad (4.27)$$

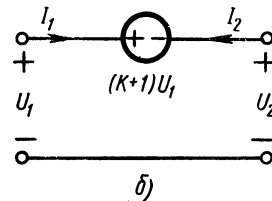
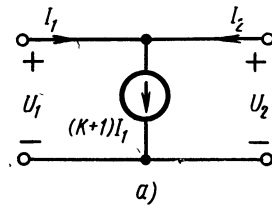
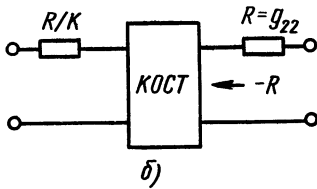
Уравнениям (4.24) конвертора с инверсией напряжения соответствует схема, приведенная на рис. 4.16, б. Схема состоит только из продольной ветви — источника напряжения, управляемого напряжением выхода с управляющим параметром $(K + 1)$. Из схемы сразу следует равенство токов входа и выхода $I_1 = -I_2$. Входное напряжение схемы

$$U_1 = U_2 + (K + 1) U_1; \quad U_1 = U_2 / -K. \quad (4.28)$$

В заключение рассмотрим примеры реализации конверторов отрицательного сопротивления с помощью транзисторных схем и схем с операционными усилителями.



а)
Рис. 4.15



б)
Рис. 4.16

Составим сначала нулаторно-нораторную схему на основе приведенных эквивалентных схем (рис. 4.15) конверторов через идеальные управляемые источники.

На рис. 4.17, а воспроизведена схема конвертора токового типа с управляемым источником тока, с начертанием изображения ИТУТ в виде явной четырехполюсной схемы. Используя схему замещения идеального усилителя тока (см. рис. 4.11, а), получим искомую нулаторно-нораторную схему КОСТ, приведенную на рис. 4.17, б. Соответственные точки схем обозначены одинаковыми цифрами.

Для получения транзисторной схемы следует соединить выводы нулатора и норатора ветвью из этих же элементов, соединенных последовательно. Выбрав из четырех возможных вариантов соединение, показанное на рис. 4.17, б, получим схему КОСТ с двумя транзисторами, приведенную на рис. 4.17, в.

Если использовать представление ОУ через нулор (см. рис. 4.12, з), то получим схему КОСТ с одним операционным усилителем (рис. 4.17, г).

На рис. 4.18, а воспроизведена схема конвертора с конверсией напряжения (с управляемым источником напряжения) при изображении ИНУН в виде явной четырехполюсной схемы. С помощью

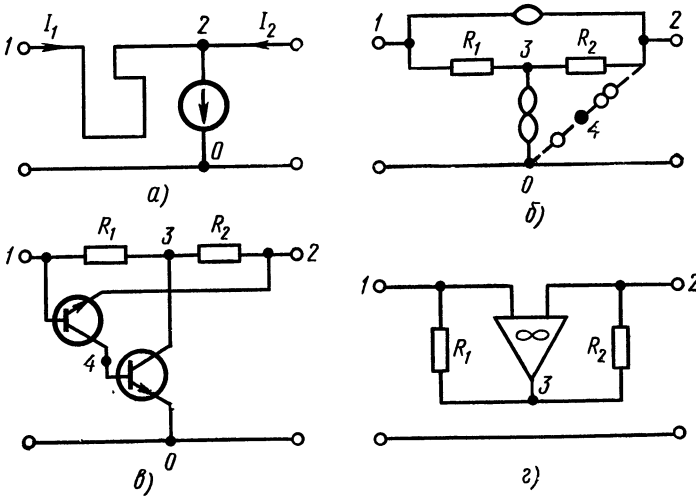


Рис. 4.17

нулаторно-нораторной схемы замещения ИНУН (см. рис. 4.10, а) получим искомую схему, изображенную на рис. 4.18, б.

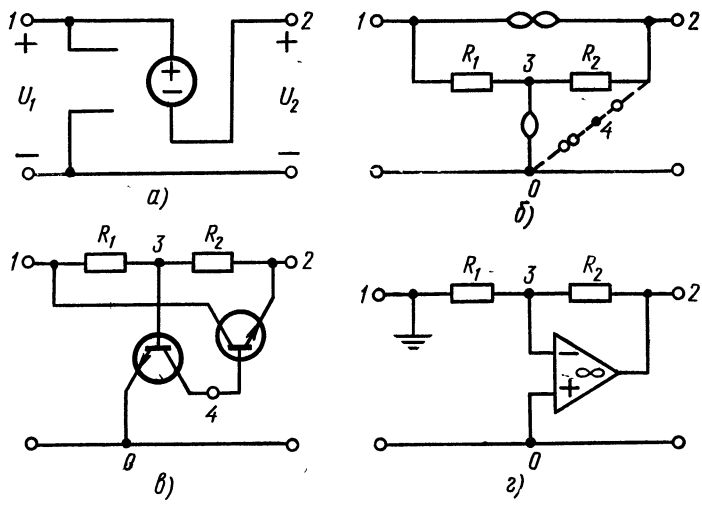


Рис. 4.18

Возможны четыре варианта соединений выводов нулятора и норатора ветвью из последовательного соединения особых элементов. Для соединения, указанного на рис. 4.18, б, получается

схема КОСН с двумя транзисторами, которая приведена на рис. 4.18, в. При использовании нулевого представления операционного усилителя (см. рис. 4.12, з) можно получить схему КОСН с одним ОУ, показанную на рис. 4.18, г. Здесь заземляется вход I — вывод гиратора.

§ 4.6. Гиратор

Гиратором называют четырехполюсник, обладающий свойством инверсии сопротивления: при включении на выходе нагрузочного сопротивления $Z_H(s)$ входное сопротивление гиратора обратно пропорционально величине Z_H :

$$Z_{вх}(s) = K/Z_H(s). \quad (4.29)$$

В общем случае величина K , называемая коэффициентом гирации, может быть функцией комплексной частоты $K = K(s)$. Будем рассматривать гиратор только с вещественным коэффициентом $K = G^{-2}$. Как видно из (4.29), гиратор обращает или инвертирует величину сопротивления, подключенного к его выходу.

Если на выходе гиратора включена емкость и $Z_H = 1/sC$, то со стороны входа цепь с гиратором будет иметь сопротивление

$$Z_{вх}(s) = sG^{-2}C = sL$$

индуктивного элемента. Следовательно, можно получить эффект индуктивного элемента с помощью емкости, подключенной к гиратору. В этом состоит наиболее важное с практической точки зрения свойство гиратора.

Из выражений (4.29) и входного сопротивления четырехполюсника через параметры передачи получим условия, необходимые для инверсии сопротивления, т. е. условия существования гиратора:

$$a_{11} = 0; \quad a_{22} = 0; \quad a_{12} \neq 0. \quad a_{21} \neq 0. \quad (4.30)$$

Уравнения гиратора, следовательно:

$$U_1 = a_{12}(-I_2); \quad (4.31)$$

$$I_1 = a_{21}U_2.$$

Напряжение на входе гиратора пропорционально току на выходе, а ток на входе — напряжению выхода.

Входное сопротивление гиратора при выполнении условий (4.30)

$$Z_{вх}(s) = a_{12}/a_{21}Z_H(s) = G^{-2}Z_H(s), \quad (4.32)$$

где $G^{-2} = a_{12}/a_{21}$.

Отношение двух параметров передачи элемента должно быть вещественным положительным:

$$\frac{a_{12}}{a_{21}} = G^{-2} > 0, \quad (4.33)$$

Для выполнения этого условия знаки обоих вещественных параметров a_{ik} должны быть одинаковыми — положительными или отрицательными.

Перепишав уравнения (4.31) в виде

$$I_1 = a_{21}U_2 = y_{12}U_2 = G_1U_2; \quad (4.34)$$

$$I_2 = -\frac{1}{a_{12}}U_1 = y_{21}U_1 = -G_2U_1,$$

получим условия инверсии (гирации) через y -параметры:

$$y_{11} = 0; \quad y_{12} = a_{21} = G_1; \quad (4.35)$$

$$y_{21} = -\frac{1}{a_{12}} = -G_2; \quad y_{22} = 0; \quad G_1G_2 = G^2.$$

Как видим, обе передаточные проводимости вещественны и различны по знаку.

При положительных знаках обоих вещественных параметров a_{12} и a_{21} параметры проводимости $y_{12} > 0$ и $y_{21} < 0$, а при отрицательных знаках $y_{12} < 0$ и $y_{21} > 0$. Соответственно матрицу y -параметров можно записать как

$$y = \begin{vmatrix} 0 & \pm G_1 \\ \mp G_2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.36)$$

На рис. 4.19, а приведено условное изображение гиратора; значения передаточных проводимостей от входа к выходу G_2 и от выхода к входу G_1 указаны у соответствующих направленных стрелок.

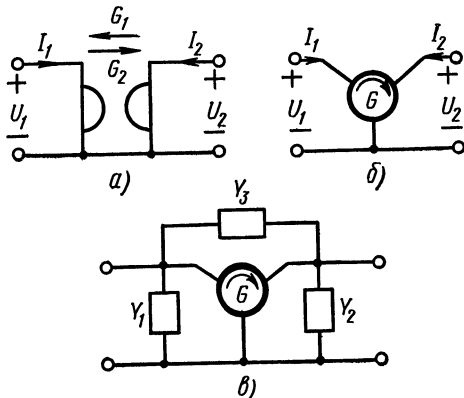


Рис. 4.19

При $G_1 = G_2 = G$ гиратор называют идеальным; его передаточную проводимость G называют гираторной проводимостью.

Условное изображение идеального гиратора показано на рис. 4.19, б.

Рассмотрим некоторые общие свойства гиратора.

При выполнении условий (4.30) гирации выходное сопротивление гиратора с подключенным на входе нагрузочным сопротивлением Z_H равно

$$Z_{\text{вых}}(s) = \frac{a_{22}Z_H + a_{12}}{a_{21}Z_H + a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{Z_H(s)} = G^{-2}/Z_H(s).$$

Гиратор производит инверсию сопротивления одинаковым образом как от выхода к входу, так от входа к выходу.

Определитель матрицы параметров передачи гириатора, удовлетворяющих условиям (4.30), получается отличным от единицы

$$\det a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -a_{12}a_{21} \neq 1.$$

Поскольку знаки параметров a_{12} и a_{21} должны быть одинаковыми, то определитель имеет отрицательный знак. Следовательно, гириатор является необратимым элементом. Этот же вывод следует

из того, что знаки передаточных проводимостей гириатора противоположны, так что $y_{12} \neq y_{21}$.

Мощность, потребляемая гириатором с вещественными параметрами при учете уравнений (4.34),

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (G_1 - G_2) u_1 u_2. \quad (4.37)$$

В случае идеального гириатора $G_1 = G_2 = G$ мощность равна нулю. Следовательно, идеальный гириатор является пассивным четырехполюсным элементом без потерь. При $G_1 \neq G_2$ мощность отлична от нуля и при $G_2 \geq G_1$ отрицательна — в этом случае гириатор представляет активный элемент.

Хотя при $G_1 \geq G_2$ гириатор обладает свойствами пассивного элемента, практически схема гириатора реализуется с помощью активных приборов. Поэтому гириатор принято включать в класс активных элементов.

Реальные схемы гириаторов отличаются от идеальных наличием паразитных параметров: $y_{11} = G_a \neq 0$; $y_{22} = G_b \neq 0$. Матрица y -параметров будет содержать все четыре элемента. Эту матрицу всегда можно разложить на сумму двух слагаемых матриц — симметричной и кососимметричной

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} G_a & G_1 \\ -G_2 & G_b \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cc} G_a & 0,5(G_1 - G_2) \\ 0,5(G_2 - G_1) & G_b \end{array} \right\| + \\ &+ \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0,5(G_1 + G_2) \\ -0,5(G_1 + G_2) & 0 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Первая y -подматрица относится к П-образной структуре из трех резистивных ветвей с проводимостями Y_1 ; Y_2 ; Y_3 , а вторая — к идеальному гириатору с проводимостью гирации G . Параллельное соединение указанных структур дает схему замещения реального гириатора (рис. 4.19, в).

Переходя к схемам замещения идеального гириатора, ограничимся рассмотрением только схемы с управляемыми напряжением источниками тока. Каждое из уравнений идеального гириатора: $I_1 = GU_2$; $I_2 = -GU_1$ можно представить схемами, изображенными

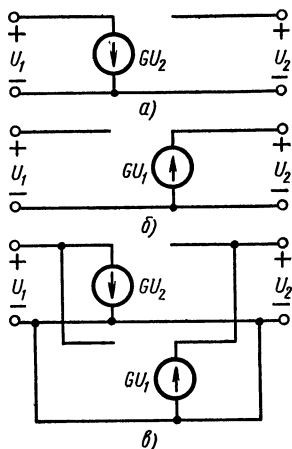


Рис. 4.20

на рис. 4.20, а, б. Поскольку в обеих схемах напряжения входов одинаковы, так же как и напряжения выходов, то, соединив обе схемы параллельно, получим принципиальную схему идеального гиратора с двумя источниками тока, управляемыми напряжениями входа и выхода (рис. 4.20, в).

Чтобы от схем с идеальными управляемыми источниками перейти к эквивалентным транзисторным схемам или схемам с ОУ, сначала следует, как уже известно, произвести замену управляемых источников тока их нулаторно-нораторными схемами замещения. Как эта замена, так и последующий переход к транзисторным схемам и схемам с ОУ не представляют особых трудностей. Поэтому не будем приводить соответствующих примеров.

Задачи

1. Получить с помощью нулаторно-нораторных схем все возможные транзисторные реализации ИНУН.
2. Получить различные транзисторные схемы, реализующие конверторы отрицательного сопротивления.
3. Получить схемы на операционных усилителях, реализующие конверторы отрицательного сопротивления.

Глава V

Реализация функций передачи активными четырехполюсниками

§ 5.1. Общие замечания

Синтез активных цепей может производиться как по частотным, так и по временным характеристикам. Аппроксимация заданных частотных и временных характеристик выполняется с помощью тех же методов, которые применялись при синтезе обычных пассивных цепей и были рассмотрены в гл. III.

Отличие синтеза активных RC -цепей от синтеза пассивных цепей проявляется в процессе реализации. Реализующая активная цепь наряду с пассивными элементами R и C будет содержать один из видов рассмотренных в предыдущей главе идеальных активных элементов: управляемый источник с конечным или бесконечным усилением, конвертор отрицательного сопротивления или гиратор.

Синтез линейных активных цепей, так же как и синтез пассивных цепей, в зависимости от постановки задачи производят либо по матрицам z - или y -параметров, либо по функциям цепи — входным функциям или функциям передачи, которые представляют отношения изображений напряжений или токов на выходе и входе цепи.

Мы будем рассматривать реализацию с помощью активных цепей только функций передачи четырехполюсных цепей, так как большинство практических задач сводится именно к синтезу по функциям передачи четырехполюсников.

В гл. III было показано, что аппроксимация как частотных, так и временных характеристик в большинстве случаев приводит к функциям передачи с комплексными полюсами.

Основная идея реализации функций передачи пассивными RC -цепями, имеющими только вещественные отрицательные полюса, с внесенными идеальными активными элементами состоит в следующем.

Структура цепи, выбираемая по тем или иным соображениям или определяемая в результате процедуры реализации, должна иметь по меньшей мере две пассивные RC -подцепи. К этим частям цепи присоединяют идеальный активный элемент таким образом, чтобы функция передачи получившейся активной цепи определенным образом зависела от параметров RC -подцепей. Именно, в знаменателе функции передачи должна входить разность или сумма параметров RC -подцепей — проводимостей или сопротивлений.

В числитель параметры могут входить также в виде разности (суммы) или произведений.

Рассмотрим случай, когда параметры двух RC -цепей являются входными проводимостями, нули и полюса которых лежат на вещественной отрицательной оси и взаимно чередуются:

$$Y_1(s) = \frac{m_1(s)}{n_1(s)}; \quad Y_2(s) = \frac{m_2(s)}{n_2(s)}.$$

Разность или сумма параметров, входящая в знаменатель функции передачи, представится как

$$Y_1 \mp Y_2 = \frac{m_1}{n_1} \mp \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 \mp m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

Произведение $n_1(s) n_2(s)$ перейдет в числитель функции передачи, так что ее знаменатель будет определяться разностью или суммой двух полиномов с вещественными отрицательными нулями:

$$N(s) = A(s) \mp B(s) = m_1 n_2 \mp m_2 n_1.$$

Степень полинома $A(s)$ должна быть равна степени знаменателя $N(s)$, а степень $B(s)$ может быть равна или меньше степени $N(s)$.

Нетрудно убедиться, что при соответствующем выборе коэффициентов полиномов $A(s)$ и $B(s)$ с вещественными отрицательными нулями полином, равный их разности или сумме, может иметь комплексные нули.

Покажем это на примере пары полиномов второго и первого порядка с буквенными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A(s) &= s^2 + a_1 s + a_0; \\ B(s) &= K(s + b_0/K). \end{aligned}$$

Коэффициент K во втором полиноме играет роль параметра активного элемента. Коэффициенты a_i и b_0 должны быть положительными, чтобы обеспечить условие устойчивости. Для вещественности нулей первого полинома необходимо, чтобы выполнялось неравенство $(a_1^2/4a_0) = m > 1$. Разность и сумма обоих полиномов

$$\begin{aligned} N(s) &= s^2 + c_1 s + c_0 = s^2 + (a_1 \mp K)s + a_0 \mp b_0 = \\ &= s^2 + (2\sqrt{a_0 m} \mp K)s + a_0 \mp b_0. \end{aligned}$$

Нули получившегося полинома будут комплексными при выполнении условия:

$$c_1^2 = (a_1 \mp K)^2 = (2\sqrt{a_0 m} \mp K)^2 < 4(a_0 \mp b_0) = 4c_0.$$

Полученное неравенство всегда может быть удовлетворено соответствующим выбором коэффициентов полиномов и параметра K .

Зададимся для примера численными значениями коэффициентов первого полинома: $A(s) = (s+1)(s+3) = s^2 + 4s + 3$. Приняв второй полином $B(s) = Ks$ ($b_0 = 0$), для разности полиномов имеем

$$N(s) = A(s) - B(s) = s^2 + (4-K)s + 3.$$

При $K > 4 - \sqrt{12}$ получим комплексные корни: в частном случае $K = 2$ корни равны $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$. При $K > 4$ корни будут находиться в правой части полуплоскости — полином неустойчив.

Если второй полином принять $B(s) = b_0$, то сумма обоих полиномов

$$N(s) = A(s) + B(s) = s^2 + 4s + 3 + b_0.$$

При $b_0 > 1$ корни будут также комплексными; в частном случае $b_0 = 5$ корни равны $s_{1,2} = -2 \pm j2$. Здесь при любом значении b_0 результирующий полином устойчив.

Аналогичным образом с помощью вычитания и суммирования двух полиномов с вещественными отрицательными нулями можно получить полином с комплексными нулями, степень которого больше двух.

Главная роль любого из идеальных элементов сводится к обеспечению получения разности или суммы параметров отдельных пассивных RC -подцепей. Управляемые источники, операционные усилители и конверторы отрицательного сопротивления дают разностное разложение, а гиратор — суммирование полиномов.

Общая структура реализующей активной цепи будет состоять из нескольких отдельных частей — пассивных RC -подцепей и активных элементов обычно одного вида. Число активных элементов может колебаться от одного до нескольких.

Суть идеи наиболее известных методов реализации активных цепей состоит в том, что заданная функция цепи расчленяется на несколько более простых составляющих — подфункций отдельных RC -подцепей.

При реализации в первую очередь необходимо найти по заданной в виде рациональной дроби функции цепи параметры RC -подцепей, которые затем реализуются с помощью методов, изложенных в гл. II. Структуры реализующих схем должны обеспечить по возможности простоту как нахождения параметров, так и вида параметров с точки зрения построения по ним пассивных подцепей.

В данной главе рассматриваются методы реализации дробно-рациональных функций передачи с помощью активных цепей.

Сначала кратко излагается понятие о чувствительности цепей. Вопрос чувствительности имеет фундаментальное значение в реализации функций цепей активными RC -схемами. Это связано, во-первых, с существенной нестабильностью параметров активных элементов и, во-вторых, с тем, что реализация комплексных полюсов RC -схемами достигается за счет вычитания коэффициентов двух полиномов с вещественными отрицательными полюсами.

Дело усложняется, если вычитаются два близких по значению, но больших по величине коэффициента, один из которых зависит от параметра активного элемента. Изменение параметра K приведет к существенному изменению коэффициентов результирующего полинома, т. е. к высокой чувствительности функций цепи. Чувствительность резко возрастает с повышением порядка функции

передачи. При проектировании активных RC -схем важно по возможности обеспечить допустимую небольшую чувствительность схемы к изменению параметра активного элемента.

После рассмотрения некоторых наиболее важных сведений о чувствительности излагаются методы реализации заданных функций передачи с помощью каждого из введенных активных четырехполюсных элементов — управляемых источников, операционных усилителей, конверторов отрицательного сопротивления и гираторов в комбинации с RC -пассивными цепями.

Из имеющихся в настоящее время различных методов реализации с применением любого из введенных идеальных элементов приводятся лишь отдельные, наиболее простые и вместе с тем получившие достаточную известность. К последним, как правило, относятся методы с выбранными заранее структурами цепи. Выбранная структура должна обеспечивать относительно легкую реализуемость пассивных RC -подсхем для достаточно широкого класса функций цепи.

Цель изложения состоит в общем обзоре принципов некоторых методов реализации.

Отбор наилучшего для той или иной цели варианта, составляющий содержание проектирования конкретной цепи, не входит в задачу изложения.

§ 5.2. Понятие о чувствительности цепей

До сих пор при рассмотрении реализации функции цепи предполагалось, что значения всех элементов, полученных в результате синтеза, в процессе сборки схемы подгоняются точно и далее остаются неизменными.

В действительности подгонка значений элементов возможна только в пределах определенных допусков, причем чем уже пределы допусков, тем дороже элемент. Далее, значения элементов не остаются постоянными, а изменяются под действием температуры, влажности, старения материалов во времени и т. п.

Параметры пассивных элементов обычно подвержены относительно небольшим отклонениям. Иначе обстоит дело с активными элементами.

Параметры активных элементов — полупроводниковых приборов, а также электронных ламп могут изменяться в более широких пределах. Разброс параметров и характеристик отдельных активных элементов оказывается весьма значительным, а подгонка их практически исключается. Рабочие точки, положение которых существенно влияет на параметры, зависят от температуры, изменения напряжения источников питания, изменения характеристик во времени. Отсюда понятно, что вопрос отклонения параметров элементов цепи от расчетных данных обсуждается именно в связи с синтезом активных цепей, хотя он имеет значение для любых цепей и систем.

Отклонение значения элемента, естественно, приводит к отклонению функции цепи, ее частотных и временных характеристик от расчетных.

При проектировании активных цепей необходимо учитывать это обстоятельство и принимать особые меры, снижающие эффект изменения параметров активных элементов.

Для количественной оценки степени влияния относительного изменения параметров на относительное изменение функции цепи вводят понятие функции (коэффициента) чувствительности S . Под функцией чувствительности или так называемой классической чувствительностью понимают отношение относительного отклонения функции цепи к относительному изменению параметра x :

$$S_x^{H(s)} = \frac{\Delta H/H}{\Delta x/x} = \frac{x}{H} \frac{\Delta H}{\Delta x}. \quad (5.1)$$

В обозначении чувствительности верхний индекс означает функцию цепи, изменение которой исследуется, а нижний — параметр, получивший отклонение от номинала.

Далее будем полагать отклонение параметров от номинального значения малым, когда приращения можно заменить дифференциалами и перейти к так называемой дифференциальной чувствительности:

$$S_x^{H(s)} = \frac{x}{H(s)} \cdot \frac{dH(s)}{dx} = \frac{d[\ln H(s)]}{d[\ln x]}. \quad (5.2)$$

Функция чувствительности показывает, грубо говоря, на сколько процентов изменяется функция цепи при изменении значения параметра на один процент.

Так же как функция цепи, чувствительность (5.2) зависит от комплексной частоты s .

В случае установившегося синусоидального режима функция цепи является комплексной функцией вещественной частоты:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)}.$$

Соответственно чувствительность будет также комплексной функцией вещественной частоты:

$$S_x^{|H(j\omega)|} = \frac{x}{H(j\omega)} \cdot \frac{dH(j\omega)}{dx} = \frac{x}{|H(j\omega)|} \cdot \frac{d|H(j\omega)|}{dx} + jx \frac{d[\arg H(j\omega)]}{dx}.$$

Вещественная часть чувствительности равна чувствительности модуля функции цепи, а мнимая часть — чувствительности аргумента

$$S_x^{|H(j\omega)|} = \frac{x}{|H(j\omega)|} \frac{d|H(j\omega)|}{dx}; \quad S_x^{\arg H} = x \frac{d[\arg H(j\omega)]}{dx}. \quad (5.3)$$

Для рассматриваемых функций цепи в виде дробей $H(s) = M(s)/N(s)$ чувствительность, выраженная через производные числителя и знаменателя, имеет вид

$$S_x^H = \frac{x}{H} \frac{dH}{dx} = x [(M'/M) - (N'/N)]. \quad (5.4)$$

Найдем в качестве примера чувствительность следующей функции передачи второго порядка:

$$H(s) = \frac{M}{N} = \frac{4xs + 2}{s^2 + 2xs + 3}.$$

Приняв номинальное значение параметра $x=1$, имеем согласно (5.4)

$$S_x^H = x \left[\frac{4s}{4xs + 2} - \frac{2s}{s^2 + 2xs + 3} \right] = \frac{2s(s^2 + 2)}{(2s + 1)(s^2 + 2s + 3)}.$$

Классическая чувствительность, как видим, является, также как и функция цепи, рациональной дробью от комплексной частоты. Положив в найденном выражении $s = j\omega$, выделим вещественную и мнимую части

$$S_x^H(j\omega) = \frac{2\omega^2(2 - \omega^2)(6 - 2\omega^2) + j2\omega(2 - \omega^2)(2 - 5\omega^2)}{(2 - 5\omega^2)^2 + \omega^2(6 - 2\omega^2)^2}.$$

Согласно (5.3) абсолютное значение вещественной части является функцией чувствительности модуля, а мнимая часть — функцией чувствительности аргумента (при $x=1$). Для наглядности можно построить графики изменения функций чувствительности в зависимости от частоты, которые покажут расположение наибольших и наименьших значений функций.

В приведенном примере функции цепи второго порядка параметр x некоторого элемента входит линейно как в числитель, так и знаменатель или, как говорят, билинейно в дробно-рациональную функцию.

Билинейная зависимость от параметра двухполюсного R -, L - и C -элемента или параметра управляемого источника вида

$$H(s, x) = \frac{M_a(s) + xM_b(s)}{N_a(s) + xN_b(s)} \quad (5.5)$$

имеет место, оказывается, для функций цепи любого порядка.

Билинейную зависимость или форму легко показать на примере влияния проводимости Y двухполюсного элемента на входную функцию цепи. На рис. 5.1 показан в виде прямоугольника двухполюсник, из которого выведен наружу элемент с проводимостью Y , представляющий параметр x . Если принять элемент $Y=x$ в качестве нагрузки четырехполюсной цепи, то получим выражение входной проводимости согласно (4.16) в виде билинейной формы:

$$Y_{вх} = \frac{I_1}{U_1} = \frac{a_{21} + a_{22}Y}{a_{11} + a_{12}Y} = \frac{a_{21}(s) + x a_{22}(s)}{a_{11}(s) + x a_{12}(s)}. \quad (5.6)$$

Здесь параметры передачи $a_{ik} = a_{ik}(s)$ являются функциями комплексной частоты.

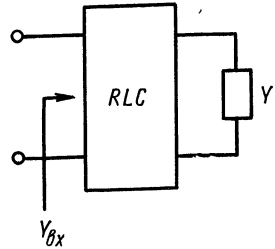


Рис. 5.1

Можно показать, что подобная же зависимость будет от управляющего параметра управляемых источников. Билинейную форму имеют также функции передачи цепи относительно параметров как двухполосных пассивных элементов, так и параметров управляемых источников.

Если значение функции чувствительности для интересующей частоты определено, то согласно (5.1) относительное изменение функции цепи при малом приращении одного параметра

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{x} S_x^H \Delta x.$$

Отсюда можно также найти допустимое изменение параметра по допустимому относительному приращению функции цепи.

В общем случае может быть несколько параметров x_j , влияние которых на изменение функции цепи требуется учесть. При этом функции чувствительности следует вычислить для всех параметров по (5.2), положив $x = x_j$:

$$S_{x_j}^H = \frac{x_j}{H(s, x_j)} \cdot \frac{\partial H(s, x_j)}{\partial x_j}.$$

Если одновременно приращения Δx_j получают все параметры, то в качестве соответствующего приращения функции цепи можно в первом приближении принять линейные члены разложения $H(s, x_j)$ в ряд Тэйлора:

$$\Delta H = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} H(s) \Delta x_j = H \sum_{j=1}^m \frac{1}{x_j} S_{x_j}^H.$$

Понятие классической чувствительности удобно применять для исследования влияния изменения того или иного параметра на изменение частотных характеристик широкополосных фильтров и других подобных устройств.

Наряду с изложенной классической чувствительностью используются и другие виды чувствительностей. К ним в первую очередь следует отнести чувствительность корня полинома: нуля или полюса функции цепи, которая служит мерой отклонения нуля или полюса от первоначального положения при малом изменении одного из параметров цепи.

Этот вид чувствительности применяют в тех случаях, когда функция цепи имеет четко выраженный нуль или полюс вблизи мнимой оси, который присущ резонансным контурам и полосовым фильтрам с высокой избирательностью.

Чувствительность корня полинома (нуля или полюса) определяют как отношение малого изменения Δs_i относительно начального положения s_i к относительному изменению параметра:

$$S_x^{s_i} = x \frac{\Delta s_i}{\Delta x} \Big|_{s=s_i}.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ корневая чувствительность пропорциональна производной от положения нуля по параметру:

$$S_x^{s_i} = x \frac{ds_i}{dx} \Big|_{s=s_i} \quad (5.7)$$

Поскольку частота не влияет на положение корня, то корневая чувствительность является постоянной комплексной величиной, не зависящей от частоты. По относительным значениям вещественной и мнимой составляющих $S_x^{s_i}$ можно судить о направлении перемещения корня на плоскости комплексной частоты при малом приращении параметра.

Выведем формулу для вычисления корневой чувствительности для полинома, линейным образом зависящего от параметра:

$$N(s) = N_a(s) + xN_b(s). \quad (5.8)$$

Ноль полинома s_i должен удовлетворять условию

$$N(s_i) = N_a(s_i) + xN_b(s_i) = 0. \quad (5.9)$$

Если параметр изменится на Δx и станет равным $x + \Delta x$, то корень примет новое значение $s_i + \Delta s_i$, которое также будет удовлетворять условию нуля:

$$N_a(s_i + \Delta s_i) + (x + \Delta x) N_b(s_i + \Delta s_i) = 0.$$

Произведем замену приращений полиномов N_a и N_b в предположении малости Δx линейными членами разложения в ряд Тейлора:

$$N_a(s_i) + N'_a(s_i) \Delta s_i + (x + \Delta x) [N_b(s_i) + N'_b(s_i) \Delta s_i] = 0.$$

При учете (5.8) и (5.9) и пренебрежении членом, содержащим произведение малых приращений, будем иметь

$$N'(s_i) \Delta s_i + N_b(s_i) \Delta x = 0.$$

Полагая $\Delta x \rightarrow 0$, получим искомую формулу для корневой чувствительности:

$$S_x^{s_i} = x \frac{ds_i}{dx} = - \frac{xN_b(s_i)}{N'(s_i)}. \quad (5.10)$$

В качестве примера вычислим корневую чувствительность для полинома второго порядка:

$$N(s, x) = s^2 + 2xs + 2 = s^2 + 2 + x \cdot 2s = N_a(s) + xN_b(s)$$

при номинальном значении параметра $x = 1$.

Корни полинома

$$s_{1,2} = -1 \pm j.$$

Значение производной при $s = s_{1,2}$:

$$\frac{dN}{ds} = (2s + 2) \Big|_{s=s_{1,2}} = \pm j2.$$

Согласно (5.10) корневая чувствительность

$$S_x^{s_{1,2}} = \frac{-x \cdot 2(-1 \pm j)}{\pm j2} = -x(1 \pm j)$$

имеет комплексное значение — корни перемещаются под углом 45° к мнимой оси: s_2 — влево вверх, а s_1 — влево вниз.

Для узкополосных полосовых фильтров, резонансных контуров и других подобных цепей, для которых наибольшее значение в интересующей полосе частот имеют комплексные полюса вблизи мнимой оси (доминантные полюса), широко применяется также понятие добротности полюса.

Как известно, для колебательного RLC -контура второго порядка положение полюса и, следовательно, острота резонансной кривой полностью определяются добротностью. При этом под добротностью понимают отношение резонансной частоты к ширине резонансной кривой, измеренной на уровне половинной мощности. Проводимость контура

$$Y(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}, \quad (5.11)$$

где $\alpha = R/2L$; $\omega_0^2 = 1/LC$.

Добротность представляется отношением характеристического сопротивления $\sqrt{L/C}$ к активному:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C} = \omega_0/2\alpha. \quad (5.12)$$

Один из двух комплексных сопряженных полюсов функции проводимости

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

можно изобразить на плоскости комплексной частоты (рис. 5.2, а) в виде вектора, длина которого равна $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}$.

Добротность полюса, следовательно, представляется отношением модуля или длины вектора, изображающего полюс, к его удвоенной вещественной составляющей.

Добротность полюса зависит от параметров цепи. Функция чувствительности добротности к изменению параметра x_j

$$S_{x_j}^Q = \frac{x_j}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_j} \quad (5.13)$$

также является определенным числом и не зависит от частоты.

Согласно записанному выше выражению добротность пассивного резонансного контура зависит от трех параметров. Вычис-

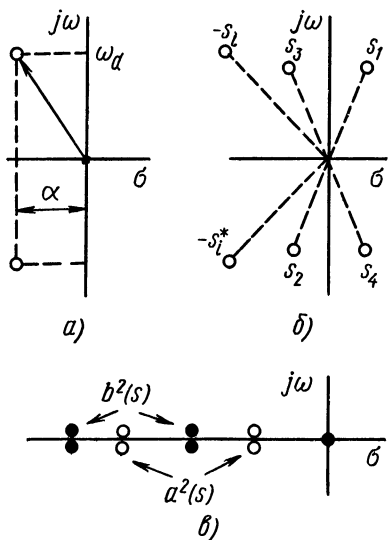


Рис. 5.2

ление чувствительной добротности по параметрам R , L и C дает соответственно:

$$S_R^Q = -1; S_L^Q = 1/2; S_C^Q = -1/2.$$

Сумма абсолютных значений чувствительностей, которая принимается в качестве наихудшего случая, равна $\sum S_{x_j}^Q = 2$. Как видим, чувствительности добротности пассивной цепи являются постоянными величинами и не зависят от величины самой добротности.

В случае активной RC -цепи дело обстоит иначе — чувствительность растет пропорционально добротности, так что при высоких добротностях величина чувствительности может стать чрезмерной. Так, в случае активного RC -фильтра нижних частот второго порядка с управляемым источником или конвертором отрицательного сопротивления знаменатель функции передачи будет представляться, как указывалось, разностью двух полиномов:

$$N(s^2) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = s^2 + a_1 s + a_0 - Kb_1 s = s^2 + (a_1 - Kb_1) s + a_0.$$

Коэффициент $2\alpha = (a_1 - Kb_1)$ при s обратно пропорционален добротности:

$$Q = \frac{\omega_0}{a_1 - Kb_1}. \quad (5.14)$$

Функция чувствительности к изменению параметра K активного элемента

$$S_K^Q = \frac{K}{Q} \frac{dQ}{dK} = \frac{Kb_1}{\omega_0} Q.$$

При $Kb_1 \approx 2\omega_0$, $S_K^Q = 2Q$. Если $Q = 20$, то $S_K^Q = 40$; это означает, что изменение параметра на 1% вызывает изменение добротности на 40% или иначе, чтобы сохранить изменение добротности в пределах 4%, необходимо обеспечить стабильность параметра K в пределах 0,1%. Данный пример убедительно показывает значение проблемы чувствительности в проектировании активных RC -цепей.

Необходимость обеспечения приемлемой чувствительности при повышенных величинах добротности оказывает решающее влияние на выбор структуры цепи, реализующей заданную функцию цепи высокого порядка. Именно, только разбиение функции передачи на функции второго порядка и каскадное соединение соответствующих реализующих активных подцепей обеспечивают приемлемую чувствительность результирующей цепи. Реализация же функции передачи с полюсами высокой добротности в виде одной общей цепи приводит к недопустимо высокой чувствительности. Данное положение можно доказать в общем виде при использовании допущения высокой добротности полюсов. Опустим это доказательство ввиду его громоздкости.

В справедливости сказанного о резком повышении чувствительности при переходе от цепи второго порядка к цепи четвертого порядка можно убедиться непосредственными вычислениями

конкретных схем. В дальнейшем будем принимать, что структура цепей, реализующих высокодобротные функции передачи высокого порядка, составлена из каскадного соединения схем второго порядка, соединенных через развязывающие усилители (эмиттерные повторители). Поэтому основное внимание уделим реализации функций второго порядка.

Таким образом, качественное рассмотрение чувствительности позволило сделать важный вывод о структуре реализующих активных схем.

Для количественного анализа чувствительности по приведенным формулам необходимо иметь определенные структуры схем, которые определяют вид функции передачи в зависимости от параметров всех элементов цепи.

Полученная по данным расчета величина чувствительности является одним из важнейших критериев выбора наилучшего варианта реализующей схемы.

В заключение отметим, что различные виды чувствительностей: классическая, корневая и добротности связаны между собой и могут быть выражены друг через друга. В частности, нетрудно получить выражение чувствительности добротности через чувствительность полюса:

$$S_{x_j}^Q = -2Q \operatorname{Im} [S_{x_j}^{s_i} / s_i].$$

§ 5.3. Разложение полиномов

Существующие методы реализации с помощью RC -цепей и активных элементов основаны на разбиении заданной функции цепи на более простые составляющие, физически осуществимые отдельными частями в виде пассивных RC -цепей. Как правило, выбирается структура, содержащая наряду с активным элементом две пассивные подцепи.

Для определения параметров двух составляющих пассивных RC -подцепей, как указывалось, необходимо производить разложение полиномов — знаменателя и числителя заданной функции передачи на разность или сумму двух полиномов с вещественными отрицательными нулями:

$$N(s) = A(s) \mp xB(s). \quad (5.15)$$

Здесь степень $A(s)$ равна степени $N(s)$, а степень $B(s)$ на единицу меньше степени $N(s)$.

Разложение на разность полиномов требуется при использовании конверторов отрицательного сопротивления или управляемых источников, а разложение на сумму — при использовании гираторов.

Разложение (5.15) можно произвести множеством различных полиномов $A(s)$ и $B(s)$ с нулями на вещественной отрицательной

оси. Но для целей синтеза заданной функции цепи активными RC -цепями необходимо, чтобы разложение обеспечивало:

- 1) реализуемость параметров y_{ik} или z_{ik} отдельных RC -трех-полосников, входящих в активную цепь;
- 2) минимальную чувствительность к изменению параметра K активного элемента.

Разложение (5.15) является представлением заданного полинома, входящего в знаменатель или числитель функции цепи в виде линейной зависимости от одного параметра активного элемента. Разложение означает, что коэффициент заданного полинома при s^k получается как разность или сумма коэффициентов $a_k \mp Kb_k$ двух полиномов, так что a_k и b_k зависят друг от друга. Как указывалось, при близких значениях a_k и b_k получается повышенная чувствительность реализации с помощью активных цепей. Поэтому очень важной проблемой является получение разложения полинома знаменателя заданной функции цепи, приводящего к минимальной чувствительности к изменению параметра активного элемента. В настоящее время разработаны методы так называемых оптимальных разложений полиномов, которые обеспечивают получение минимальной чувствительности к изменению параметра активного элемента.

Дальше излагаются численные процедуры, обеспечивающие получение оптимального разложения отдельно для случая разности и случая суммы полиномов. Доказательство оптимальности, приводимое в литературе [14], опускается ввиду громоздкости.

Разложение на разность полиномов

Рассматривается полином четной степени с простыми (не кратными) комплексными сопряженными нулями $-s_i$ и $-s_i^*$, лежащими в левой полуплоскости:

$$N(s) = \prod_{i=1}^{n/2} (s + s_i) (s + s_i^*). \quad (5.16)$$

Коэффициент при старшем члене принят равным единице.

Требуется представить этот полином в виде разности двух полиномов, содержащих только вещественные отрицательные нули, при значении параметра $K=1$:

$$N(s) = A(s) - KB(s) = \prod_{i=1}^n (s + \alpha_i) - K \prod_{i=1}^n (s + \beta_i). \quad (5.17)$$

Степень $A(s)$ равна степени n полинома $N(s)$, а степень $B(s)$ равна или на единицу меньше n . Нуль полинома $N(s)$, очевидно, должен удовлетворять условию

$$\frac{A(s_i)}{KB(s_i)} = \frac{\prod (s_i + \alpha_i)}{K \prod (s_i + \beta_i)} = 1.$$

Разбиение (5.17) необходимо произвести таким образом, чтобы чувствительность полинома к изменению параметра K была минимальной.

Следующая процедура позволяет найти значения полиномов $A(s)$ и $B(s)$, обеспечивающие оптимальное разбиение, т. е. получение минимума чувствительности:

1. Производится замена s на s^2 в заданном полиноме (5.16):

$$N(s^2) = \prod_{s=1}^n (s^2 + s_i) (s^2 + s_i^*).$$

2. Корни $N(s^2)$ относительно s будут располагаться на плоскости s в квадрантной симметрии (рис. 5.2, б). Из корней, лежащих в левой полуплоскости, образуется полином $P(s)$:

$$P(s) = \Pi (s + \sqrt{-s_i}) (s + \sqrt{-s_i^*}) = \Pi (s^2 + \gamma_1 s + \gamma_2) = a(s^2) + sb(s^2).$$

Корни, лежащие в правой полуплоскости, образуют полином

$$P(-s) = \Pi (s^2 - \gamma_1 s + \gamma_2) = a(s^2) - sb(s^2).$$

Следовательно,

$$N(s^2) = P(s) P(-s) = a^2(s^2) - s^2 b^2(s^2).$$

3. Искомое разбиение находится обратной подстановкой s вместо s^2 в последнем выражении и введением K :

$$N(s) = a^2(s) - K s b^2(s). \quad (5.18)$$

Корни $A(s)$ и $B(s)$ имеют кратность 2 и чередуются (рис. 5.2, в).

Для нахождения полиномов $a(s)$ и $b(s)$, определяющих четную и нечетную части разложения, достаточно составить полином $P(s)$, т. е. найти коэффициенты γ_1 и γ_2 . Для квадратного сомножителя — трехчлена, соответствующего паре комплексных сопряженных нулей, имеем

$$N_1(s^2) = s^4 + \mu_1 s^2 + \mu_2 = (s^2 + s\gamma_1 + \gamma_2) (s^2 - s\gamma_1 + \gamma_2).$$

Отсюда искомые коэффициенты полинома

$$\gamma_2 = \sqrt{\mu_2}; \quad \gamma_1 = \sqrt{2\mu_2 - \mu_1}. \quad (5.19)$$

Приведенное оптимальное разложение единственно и ограничений не имеет.

Рассмотрим примеры оптимального разложения на разность полиномов.

Для полинома второго порядка

$$N(s) = s^2 + s + 1$$

имеем

$$N(s^2) = s^4 + s^2 + 1.$$

Согласно (5.19) коэффициенты

$$\gamma_2 = 1; \quad \gamma_1 = \sqrt{2-1} = 1.$$

Следовательно, полином

$$P(s) = (s^2 + 1) + s = a(s^2) + sb(s^2).$$

Искомое разложение в соответствии с (5.18)

$$N(s) = (s + 1)^2 - sK.$$

Найдем оптимальное разложение нормированного полинома второго порядка с комплексными нулями, который можно представить как

$$N(s) = s^2 + 2\alpha s + 1, \quad (\alpha < 1).$$

Замена s на s^2 дает четный полином

$$N(s^2) = s^4 + 2\alpha s^2 + 1.$$

Согласно (5.19) коэффициенты

$$\gamma_2 = 1; \quad \gamma_1 = \sqrt{2(1 - \alpha)}.$$

Полином из нулей $N(s^2)$ в левой полуплоскости

$$P(s) = (s^2 + 1) + s\sqrt{2(1 - \alpha)} = a(s^2) + sb(s^2).$$

Оптимальное разложение согласно (5.18)

$$N(s) = (s + 1)^2 - Ks \cdot 2(1 - \alpha).$$

Разбиение на сумму полиномов

Снова рассматривается полином с простыми комплексными сопряженными нулями $-s_i$ и $-s_i^*$, расположенными в левой полуплоскости, который можно представить в виде произведения сомножителей — двучленов вида (5.16). Этот полином должен быть представлен в виде суммы двух полиномов с вещественными отрицательными нулями при номинальном значении параметра $K=1$:

$$N(s) = A(s) + KB(s) = \Pi(s + \alpha_i) + K\Pi(s + \beta_i). \quad (5.20)$$

Степень $A(s)$ равна, а степень $B(s)$ равна или на единицу меньше степени заданного полинома. Нуль s_i полинома $N(s)$ будет удовлетворять условию

$$\frac{KB(s_i)}{A(s_i)} = -1. \quad (5.21)$$

Нас интересует оптимальное разложение (5.20), которое обеспечивает наименьшую чувствительность полинома к изменению параметра K .

Одна из процедур получения оптимального разложения состоит в следующем.

Из n нулей заданного полинома учитываются нули $-s_i^* = -\rho_1 - j\rho_2$, лежащие в третьем квадранте и, следовательно, имею-

щие отрицательные как вещественные, так и мнимые части. Произведение сомножителей — двучленов с указанными нулями представляется в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$\prod_{i=1}^n (s + s_i^*) = \prod_{i=1}^n (s + \rho_1 + j\rho_2) = a_1(s) + jb_1(s).$$

Если выполняется условие аргументов

$$\sum_{i=1}^{n/2} \arg s_i \leq \pi/2, \quad (5.22)$$

то оптимальная чувствительность к параметру K обеспечивается при принятии в качестве составляющих полиномов разбиения квадратов вещественной и мнимой составляющих

$$A(s) = a_1^2(s); \quad B(s) = b_1^2(s). \quad (5.23)$$

Как видим, разложение на сумму полиномов имеет существенное ограничение в виде условия (5.22). Если это условие выполняется со знаком неравенства, то оптимальное разложение на сумму неединственно — возможны разложения, отличные от приведенного.

В качестве примера произведем оптимальное разложение

$$N(s) = s^2 + s + 1.$$

Корни полинома: $-s_1 = -0,5 + j\sqrt{3}/2$; $-s_1^* = -0,5 - j\sqrt{3}/2$. Учитывая величину, соответствующую второму корню, имеем

$$s + 0,5 + j\sqrt{3}/2 = a_1(s) + jb_1(s).$$

Согласно (5.23) принимаем

$$A(s) = (s + 0,5)^2; \quad B(s) = 3/4.$$

Оптимальное разложение при номинальном значении $K = 1$:

$$N(s) = s^2 + s + 1 = (s + 0,5)^2 + K \cdot 3/4.$$

Найдем теперь оптимальное разложение полинома второго порядка с буквенными коэффициентами, который можно представить как

$$N(s) = s^2 + 2\alpha s + 1, \quad (\alpha < 1).$$

Учтя величину, соответствующую корню $s_1^* = -\alpha - j\sqrt{1-\alpha^2}$, имеем

$$s + \alpha + j\sqrt{1-\alpha^2} = a_1 + jb_1.$$

Оптимальное разложение

$$N(s) = (s + \alpha)^2 + Ks(1 - \alpha^2).$$

Рассмотрим пример оптимального разбиения полинома четвертого порядка

$$N(s) = (s^2 + 2s + 5)(s^2 + 6s + 10).$$

При учете корня $s_1 = -1 - j$ первого множителя и корня $s_2 = -3 - j2$ второго множителя, которые удовлетворяют условию аргументов (5.22): $\sum \arg s_i = 45^\circ + \arctg 2/3 < \pi/2$, получим

$$(s + 1 + j)(s + 3 + 2j) = s^2 + 4s + 1 + j3(s + 1).$$

Согласно (5.23) имеем разбиение

$$N(s) = (s^2 + 4s + 1)^2 - K9s(s + 1)^2.$$

Из данного примера наглядно видно, что условие аргументов существенно ограничивает возможность оптимального разложения полиномов высокого порядка с повышенными добротностями нулей.

§ 5.4. Реализация функций передачи активными RC-цепями с управляемыми источниками

Рассмотрим некоторые методы реализации функций передачи активными RC-цепями с управляемыми источниками, структуры которых известны — выбраны по тем или иным общим соображениям. Выбранная структура цепи, включающая в себя управляемый источник (активная часть) и два RC-трехполюсника (пассивная часть), должна обеспечивать относительно легкую реализацию достаточного широкого класса функций передачи и по возможности низкую чувствительность функции передачи.

Очень важно с практической точки зрения, чтобы имелась возможность заземления вывода входа и вывода выхода. Кроме того, управляемые источники напряжения должны располагаться на выходе активной цепи для получения малой величины выходного сопротивления. При малом выходном сопротивлении последующий каскад можно присоединить непосредственно без буферного или разделительного усилителя, не опасаясь взаимного влияния каскадов друг на друга.

Наиболее характерным для RC-цепей с управляемыми источниками, реализующих функции передачи с комплексными полюсами, является применение обратной связи — только благодаря обратной связи, как уже отмечалось, RC-цепь с управляемыми источниками может иметь комплексные полюса.

Из большого числа предложенных активных RC-цепей с управляемыми источниками рассмотрим схемы двух типов: 1) каскадную схему из пассивного RC-трехполюсника и активного трехполюсника с одним управляемым источником и 2) схемы с обратными связями и известными видами элементов.

Каскадная схема, реализующая заданную функцию передачи напряжений в режиме холостого хода

Цепь состоит из каскадно-соединенных двух частей (рис. 5.3, а): 1) пассивного RC-трехполюсника a с параметрами y_{ik}^a и 2) активного RC-трехполюсника (пунктирный прямоуголь-

ник), состоящего из неинвертирующего ИНУН, т. е. идеального усилителя напряжения с усилением $K > 0$ и RC -ветвей Y_1 и Y_2 параллельной обратной связи.

В первую очередь необходимо по заданной функции передачи найти параметры пассивного трехполюсника и проводимости ветвей Y_1 и Y_2 , которые должны быть реализованы пассивными RC -цепями. Для этого сначала следует найти выражение функции передачи напряжений в режиме разомкнутого выхода через параметры пассивного и активного трехполюсников. Поскольку имеем дело с каскадной структурой, то параметры результирующей цепи

можно формально найти, перемножая матрицы параметров передачи a_{ik} обоих трехполюсников. Функцию передачи можно выразить через найденные параметры передачи.

Здесь используем более простой и наглядный способ получения результирующей функции передачи всей цепи, перемножая функции передачи отдельных каскадов, которые определяются с учетом действительной нагрузки каждого каскада. Предварительно необходимо указать на схемах направления и величины напряжений и токов на входе и выходе каждого каскада

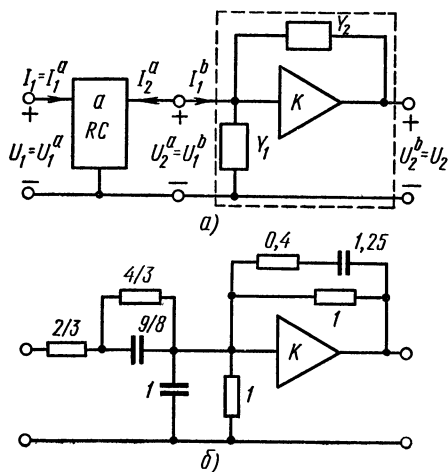


Рис. 5.3

и установить связи между ними. Из указанных на схеме рис. 5.3, a напряжений и величин токов и напряжений имеем: $U_2 = U_2^b$; $U_1 = U_1^a$; $I_1^b = -I_2^a$; $U_2^a = U_1^b$.

Интересующую нас функцию передачи напряжений цепи в режиме холостого хода можем записать как

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{I_1^b} \cdot \frac{I_1^b}{U_1} = \frac{U_2^b}{I_1^b} \cdot \frac{-I_2^a}{U_1^a}.$$

Первое отношение представляет сопротивление передачи активного трехполюсника в режиме холостого хода, а второе отношение — проводимость передачи пассивного RC -трехполюсника, нагруженного входным сопротивлением активного трехполюсника.

Найдем сопротивление передачи и входное сопротивление активного трехполюсника с разомкнутым выходом. Ток на входе трехполюсника, как видно из рис. 5.3, a , при $U_2^b = KU_1^b$ и равенстве нулю входного тока идеального усилителя

$$\begin{aligned} I_1^b &= Y_1 U_1^b - Y_2 (U_2 - U_1^b) = (Y_1 + Y_2) U_1^b - Y_2 K U_1^b = \\ &= (Y_1 + Y_2) U_2^b / K - Y_2 U_2^b. \end{aligned}$$

Отсюда входное сопротивление

$$Z^b = \frac{U_1^b}{I_1^b} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 - KY_2} = \frac{1}{Y_1 - Y_2(K-1)} \quad (5.24)$$

и сопротивление передачи активного трехполюсника

$$\frac{U_2^b}{I_1^b} = \frac{K}{Y_1 - (K-1)Y_2} = KZ^b. \quad (5.25)$$

Как видим, знаменатели обеих функций представлены разностями двух п. в. дробей.

Проводимость передачи первого трехполюсника, нагруженного проводимостью (5.24), согласно (В.6) выразится

$$\frac{I_2^a}{U_1} = \frac{y_{21}^a Y^b}{y_{22}^a + Y^b} = \frac{y_{21}^a Y^b}{y_{22}^a + Y_1 - (K-1)Y_2}. \quad (5.26)$$

Искомую функцию передачи напряжений каскадной структуры получим, перемножив (5.25) и (5.26):

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{y_{21}^a K}{y_{22}^a + Y_1 - (K-1)Y_2}. \quad (5.27)$$

Проводимостью параллельной ветви задаются — принимают ее постоянной $Y_1 = 1$ (нормированное значение). Эта резистивная проводимость может компенсировать конечную входную проводимость реального усилителя.

Знаменатель функции передачи состоит из разности двух входных проводимостей RC -цепей. Представив проводимости в виде дробей с вещественными отрицательными нулями и полюсами:

$$y_{22}^a = \frac{m_{22}^a(s)}{n_{22}^a(s)}; \quad Y_1 = 1;$$

$$y_{21}^a = \frac{m_{21}^a(s)}{n_{22}^a(s)}; \quad Y_2 = \frac{m_2(s)}{n_2(s)},$$

выразим функцию передачи в виде отношения полиномов

$$H_U(s) = \frac{K m_{21}^a n_2}{m_{22}^a n_2 + n_2 n_{22}^a - (K-1) m_2 n_{22}^a}.$$

Нули функции передачи определяются полюсами проводимости Y_2 и нулями передачи пассивного трехполюсника. Комплексные нули передачи могут быть получены только выбором соответствующей конфигурации RC -трехполюсника, а вещественные нули — также проводимостью Y_2 .

Разность двух полиномов с отрицательными вещественными нулями в знаменателе дает результирующий полином с комплексными нулями.

Для определения по заданной функции цепи $H_U = M(s)/N(s)$ параметров RC -подцепей следует выбрать вспомогательный полином $Q(s)$ с вещественными отрицательными нулями. Степень полинома может быть на единицу меньше или же равна, а также быть

на единицу больше (что невыгодно) наибольшей из степеней числителя и знаменателя заданной функции передачи.

Деление числителя и знаменателя функции передачи на выбранный полином с учетом (5.27) и $Y_1=1$ дает

$$H_U = \frac{M(s)/Q(s)}{N(s)/Q(s)} = \frac{y_{21}^a K}{y_{22}^a + 1 - (K-1)Y_2}. \quad (5.28)$$

Приравняв числители обеих частей выражения, получим передаточную проводимость трехполюсника

$$y_{21}^a = M(s)/KQ(s).$$

Прежде чем определять остальные параметры, необходимо разложить выражение, входящее в знаменатель, на сумму простых дробей, предварительно умножив и разделив его на s :

$$s \cdot \frac{N(s)}{sQ(s)} = k_0 + k_\infty s + \sum_i \frac{k_i}{s + \alpha_i} - \sum_j \frac{k_j}{s + \beta_j}.$$

Здесь полюсы $-\alpha_i$ и $-\beta_j$ имеют соответственно положительные и отрицательные вычеты.

Параметр y_{22}^a должен иметь те же полюса, что и y_{21}^a (как $-\alpha_i$, так $-\beta_j$). Чтобы выполнить это условие, необходимо отрицательные вычеты разбить на две части $k_j = k'_j + k''_j$. Если задаться определенным положительным значением k'_j , то значение $k''_j = k_j - k'_j$ примет также вполне определенное отрицательное значение. Прибавив и вычтя 1 для учета Y_1 , запишем знаменатель

$$\left(k_0 + k_\infty s + \sum_i \frac{k_i}{s + \alpha_i} + \sum_j \frac{k'_j}{s + \beta_j} \right) + 1 - \left(1 + \sum_j \frac{k''_j}{s + \beta_j} \right).$$

Согласно (5.28) выражение в первой скобке равно выходной проводимости короткого замыкания пассивного трехполюсника y_{22}^a , а выражение во второй скобке — входной проводимости Y_2 ветви обратной связи, умноженной на величину $(K-1)$, зависящую от коэффициента усиления идеального усилителя. Поскольку все коэффициенты, входящие в параметры в виде простых дробей положительны, то найденные параметры являются физически реализуемыми входными проводимостями RC -цепей.

Имеется некоторая свобода в разбиении отрицательных вычетов, а также в выборе коэффициента усиления усилителя, которая будет влиять на уровень сопротивлений обеих цепей, а также на чувствительность. Поэтому при решении практических задач может потребоваться дополнительный анализ для выбора оптимального варианта.

В качестве примера реализуем функцию передачи второго порядка с конечным нулем:

$$H_U(s) = \frac{s + 2/3}{s^2 + s + 1}.$$

Выберем вспомогательный полином $Q(s) = s + 2$ и разделим на него числитель и знаменатель функции передачи:

$$H_U(s) = \frac{(s+2/3)/(s+2)}{(s^2+s+1)/(s+2)}.$$

В соответствии с (5.28) имеем

$$y_{21}^a = (s + 2/3)/(s + 2).$$

Разложение дроби в знаменателе дает

$$s \frac{(s^2+s+1)}{s(s+2)} = s \left(1 + \frac{0,5}{s} - \frac{1,5}{s+2} \right) = s + 0,5 - \frac{1,5s}{s+2}.$$

Разобьем вычит $k_1 = -1,5 = k_1' + k_1''$; при $k_1' = 1$ $k_1'' = -2,5$.

Выражение в знаменателе теперь представится как

$$s + 0,5 + \frac{s}{s+2} + 1 - \left(1 + \frac{2,5s}{s+2} \right) = y_{22}^a + 1 - (K - 1) Y_2.$$

Приняв $K = 2$, получим

$$y_{22}^a = s + 0,5 + \frac{s}{s+2} = \frac{s^2 + 3,5s + 1}{s+2};$$

$$Y_2 = 1 + \frac{2,5s}{s+2}.$$

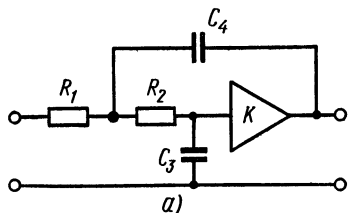
Как параметры пассивного трехполюсника y_{22}^a и y_{21}^a , так и проводимость Y_2 двухполюсника легко реализуются. На рис. 5.3, б приведена полученная в результате реализации схема. В случае комплексных нулей передачи реализации как обычно несколько усложнится.

Схема с управляющим источником напряжения и заданными видами пассивных элементов ветвей

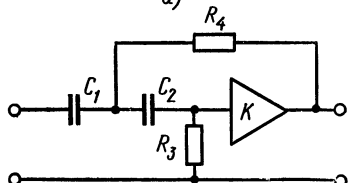
В отличие от предыдущего случая, где известна лишь общая структура цепи, здесь выбраны также виды элементов каждой пассивной ветви. Неизвестными являются величины всех элементов.

Задача реализации состоит в том, что сначала в результате анализа определяется выражение функции передачи. Далее, приравнявая буквенные коэффициенты этого выражения и соответствующие численные коэффициенты заданной дробной функции передачи, определяем величины элементов. При этом приходится решать систему нелинейных уравнений относительно неизвестных величин, которые должны быть вещественными и положительными при успешной реализации. Решение получается относительно простым только для функций второго порядка. Метод, следовательно, основан на подгонке коэффициентов функции передачи реализующей цепи.

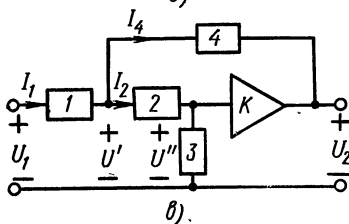
В качестве примера этого вида реализации рассмотрим получившие широкую известность схемы, реализующие функции передачи второго порядка фильтров нижних и верхних частот и приведенные на рис. 5.4, а, б (схемы Саллена и Ки).



а)



б)



в)

Рис. 5.4

На рис. 5.4, в приведена структура, общая для обеих схем, на которой указаны токи и напряжения ветвей и узлов. Для этой структуры легко записать соотношения равновесия токов и напряжений, перемещаясь по схеме справа налево.

Напряжение на входе ИНУН $U'' = U_2/K$. Ток ветви 2 равен току ветви 3: $I_2 = Y_3 U'' = Y_3 U_2/K$. Напряжение среднего узла $U' = U'' + Z_2 I_2 = (1 + Z_2 Y_3) U_2/K$. Ток ветви 4 обратной связи $I_4 = Y_4 (U_2 - U') = Y_4 U_2 (K - 1 - Z_2 Y_3)/K$. Ток ветви 1 равен разности токов ветвей 2 и 4:

$$I_1 = I_2 - I_4 = [Y_3 - Y_4 (K - 1) + Z_2 Y_3 Y_4] U_2/K.$$

Напряжение на входе цепи

$$U_1 = U' + Z_1 I_1 = [1 + Z_2 Y_3 + Z_1 Y_3 - Z_1 Y_4 (K - 1) + Z_1 Z_2 Y_3 Y_4] U_2/K.$$

Отсюда функция передачи напряжений

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{K}{Z_1 Z_2 Y_3 Y_4 + (Z_1 + Z_2) Y_3 - (K - 1) Z_1 Y_4 + 1}. \quad (5.29)$$

Коэффициент усиления напряжений K входит в выражение билинейно.

Для схемы фильтра нижних частот (рис. 5.4, а): $Z_1 = G_1^{-1}$; $Z_2 = G_2^{-1}$; $Y_3 = sC_3$; $Y_4 = sC_4$ и функция передачи

$$H_U = \frac{K G_1 G_2 / C_3 C_4}{s^2 + s [(G_1/C_4) + (G_2/C_4) - (K - 1) G_2/C_3] + G_1 G_2 / C_3 C_4}. \quad (5.30)$$

Знаменатель относительно параметра K разложен на разность двух полиномов.

Для схемы фильтра верхних частот (рис. 5.4, б): $Z_1 = 1/sC_1$; $Z_2 = 1/sC_2$; $Y_3 = G_3$; $Y_4 = G_4$ и функция передачи

$$H_U = \frac{Ks^2}{s^2 + s \left[G_3 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - (K-1) G_4/C_1 \right] + G_3 G_4 / C_1 C_2}. \quad (5.31)$$

Знаменатель здесь относительно параметра K также разложен на разность двух полиномов. В качестве примера реализуем с помощью схемы рис. 5.4, а функцию передачи второго порядка фильтра нижних частот:

$$H_U(s) = \frac{m}{s^2 + sb + 1}.$$

Здесь коэффициент m , определяющий отношение напряжений на выходе и входе при нулевой частоте, должен быть выбран из условия реализуемости; коэффициент в знаменателе определяет добротность полюса.

Приравняв соответствующие коэффициенты этого выражения и выражения (5.30), получим уравнения:

$$\begin{aligned} (G_1 G_2 / C_3 C_4) &= 1; & (K G_1 G_2 / C_3 C_4) &= m; \\ \frac{G_1 + G_2}{C_4} - (K-1) \frac{G_2}{C_3} &= b. \end{aligned}$$

Число неизвестных величин больше числа уравнений, поэтому необходимо задаться двумя из них. Приняв $G_1 = G_2 = 1$, из уравнений имеем: $K = m$; $C_3 = 1/C_4$ и

$$C_4 = \frac{-b}{2(m-1)} (1 \pm \sqrt{1 + 8(m-1)/b^2}).$$

При $m = K = 3$ и $b = 1$ $C_4 = 0,78$; $C_3 = 1,28$. Аналогичным образом определяются значения элементов схемы фильтра верхних частот.

Достоинство рассмотренных структур состоит в простоте схем, содержащих минимальное число элементов и допускающих легкую настройку, что очень существенно с практической точки зрения.

Недостатком же является высокая чувствительность схем при высоких значениях добротности полюсов. Поэтому они находят применение при низких и умеренных значениях добротности ($Q < 20$).

§ 5.5. Реализация функций передачи активными RC-цепями с операционными усилителями

Существует большое число схем с операционными усилителями, реализующих заданную в виде рациональной дроби функцию передачи. Количество и тип операционных усилителей в реализующих схемах различны; применяются один или два ОУ, ОУ с одним или двумя входами.

Некоторые из схем основаны на построении аналоговых моделей, где в интеграторах, сумматорах и инверторах используются операционные усилители с соответствующими ветвями параллельной обратной связи. В таких схемах число ОУ может быть больше двух.

Мы ограничимся разбором лишь одной схемы, содержащей один операционный усилитель с одним управляющим входом и реализующей заданную функцию передачи напряжений в режиме разомкнутого выхода.

Цепь (рис. 5.5) состоит из каскадного соединения двух трехполосников: пассивного RC -трехполосника a и активного трехполосника, составленного из параллельного соединения ОУ и второго RC -трехполосника b .

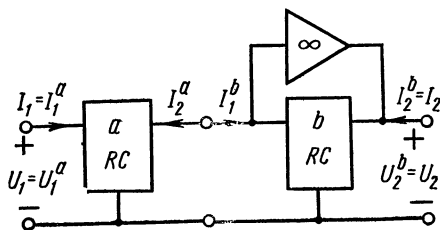


Рис. 5.5

Выразим функцию передачи напряжений в режиме холостого хода цепи через параметры составляющих трехполосников. Для этого используем примененный в предыдущем параграфе наглядный и простой способ нахождения функций передачи каскадных схем. В соответствии с распределением токов и напряжений в выводах отдельных частей схемы, показанным на рис. 5.5, функцию передачи напряжений можем записать как

Выводим функцию передачи напряжений в режиме холостого хода цепи через параметры составляющих трехполосников. Для этого используем примененный в предыдущем параграфе наглядный и простой способ нахождения функций передачи каскадных схем. В соответствии с распределением токов и напряжений в выводах отдельных частей схемы, показанным на рис. 5.5, функцию передачи напряжений можем записать как

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{I_1^b} \cdot \frac{I_1^b}{U_1} = \frac{U_2}{I_1^b} \cdot \frac{-I_2^a}{U_1}.$$

Первое отношение U_2/I_1^b — сопротивление передачи каскада, состоящего из параллельно соединенных ОУ и RC -трехполосника b , можно получить сразу, если учесть, что входной ток и входное напряжение ОУ равны нулю. Поэтому напряжения и токи на входе и выходе трехполосника известны: при заданном выходном напряжении U_2 напряжение на входе $U_1 = (U_2/K) \rightarrow 0$, а входной ток, равный току на входе каскада, можно записать как

$$I_1^b = I_1 = y_{12}^b U_2 + y_{11}^b U_2 / K = y_{12}^b U_2.$$

Следовательно, сопротивление передачи каскада

$$\frac{U_2}{I_1^b} = \frac{1}{y_{12}^b}.$$

Второе отношение — проводимость передачи RC -трехполосника a , выход которого находится в режиме короткого замыкания, равно передаточной проводимости $y_{21}^a = I_2^a/U_1^a$.

Следовательно, функция передачи напряжений рассматриваемой цепи в режиме холостого хода

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{y_{21}^a}{y_{12}^b} \quad (5.32)$$

определяется отношением передаточных проводимостей двух пассивных RC -трехполосников.

Представим передаточные проводимости в виде дробей $y_{ik} = m_{ik}(s)/n(s)$. Тогда

$$H_U = \frac{y_{21}^a}{y_{12}^b} = \frac{m_{21}^a(s) n^b(s)}{n^a(s) m_{12}^b(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}.$$

Здесь полиномы $n(s)$ имеют только вещественные отрицательные нули, а полиномы $m_{ik}(s)$ могут иметь комплексные нули. При соответствующем выборе нулей передаточных проводимостей цепи a и цепи b , очевидно, можно реализовать функции передачи с комплексными полюсами и нулями.

Для определения по заданной функции передачи передаточных проводимостей короткого замыкания трехполосников следует выбрать полином $Q(s)$ с вещественными отрицательными полюсами. Степень полинома должна быть равна или на единицу меньше наибольшей из степеней числителя или знаменателя функции передачи.

Пусть задана функция передачи второго порядка вида

$$H_U(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}.$$

Если принять $Q(s) = s+2$, то передаточные проводимости короткого замыкания обоих RC -трехполосников

$$y_{21}^a = \frac{s+1}{s+2}; \quad y_{21}^b = \frac{s^2+s+1}{s+2}.$$

Оба параметра могут быть реализованы в виде RC -трехполосников; если присоединить к ним соответствующие входные параметры y_{22} (или y_{11}) с теми же полюсами. Для первой цепи можно, например, принять $y_{22}^a = y_{21}^a = (s+1)/(s+2)$ и реализовать цепь последовательной RC -ветвью. Для второй цепи, передача которой имеет пару комплексных нулей, числитель y_{22}^b должен быть полиномом второго порядка; процедура реализации здесь усложняется — следует применить перекрытую T -структуру.

§ 5.6. Реализация функций передачи с помощью RC -цепей и конверторов отрицательного сопротивления

Как и в других реализациях с помощью активных RC -цепей при использовании конверторов отрицательного сопротивления (КОС) задаются структурой синтезируемой цепи, которая допускает по возможности простую процедуру построения составных частей.

Принятая структура, как правило, включает в себя один активный элемент — КОС и несколько пассивных RC -подцепей. Задача реализации состоит в определении параметров и построении RC -подцепей.

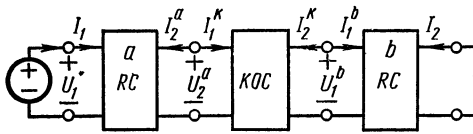
Предложено довольно большое число структур цепей с КОС, позволяющих реализовать заданную функцию передачи.

Рассмотрим две простые структуры, получившие наибольшую известность — каскадную и параллельную.

Каскадная структура

Схема реализующей цепи состоит из каскадного соединения трех трехполюсников (рис. 5.6): двух пассивных RC -трехполюсников — на входе a и выходе b цепи и конвертора отрицательного сопротивления, включенного между обеими RC -структурами.

В качестве функции передачи, подлежащей реализации каскадной структурой, примем проводимость передачи, представляющую отношение изображений тока короткозамкнутого выхода и напряжения на входе цепи. Будем предполагать, что проводимость



передачи задана в виде рациональной дроби с комплексными полюсами, лежащими в левой полуплоскости:

$$Y_{21}(s) = K \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{I_2}{U_1}. \quad (5.33)$$

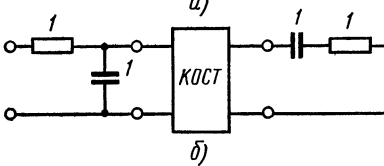


Рис. 5.6

Основная задача состоит в определении физически реализуемых параметров пассивных RC -трехполюсников, в качестве которых

удобно принять y -параметры, поскольку выход трехполюсников b принят замкнутым накоротко, а вход трехполюсника a — подключенным к источнику напряжения.

Выразим проводимость передачи всей цепи через y -параметры составляющих четырехполюсников, используя отношения величин выводов каскадов. На схеме рис. 5.6, a указаны токи и напряжения выводов всех элементов. Из схемы видно: $I_2^k = -I_1^b$; $I_1^k = -I_2^a$; $U_2^k = U_1^b$; $U_1^k = U_2^a$.

Интересующую нас проводимость передачи можно представить как

$$Y_{21}(s) = \frac{I_2}{U_1} = \frac{I_2}{U_1^b} \cdot \frac{U_1^b}{U_2^a} \cdot \frac{U_2^a}{U_1^a} = \frac{I_2}{U_1^b} \cdot \frac{U_2^k}{U_1^k} \cdot \frac{U_2^a}{U_1^a}.$$

Отношение величин выводов будут функциями передачи отдельных элементов, если они определены с учетом соответствующих нагрузок.

Первое отношение равно передаточной проводимости y_{21}^b цепи b с короткозамкнутым выходом. Входная проводимость этой цепи, равная y_{11}^b , является нагрузкой конвертора.

Второе отношение, равное отношению напряжений на выходе и входе конвертора, составляет $-K$ для КОСН и 1 для КОСТ, независимо от нагрузки.

Входная проводимость конвертора, равная $-y_{11}^b K$, является нагрузкой трехполюсника a . С учетом этой нагрузки третье отношение, представляющее функцию передачи цепи a , составит

$$\frac{U_2^a}{U_1^a} = \frac{-y_{21}^a}{y_{22}^a - y_{11}^b K}.$$

Перемножим найденные отношения, получим искомое выражение проводимости передачи в случае КОСН:

$$Y_{21}(s) = \frac{K y_{21}^a y_{21}^b}{y_{22}^a - y_{11}^b K}. \quad (5.34)$$

Числитель здесь равен произведению передаточных проводимостей отдельных трехполюсников, а знаменатель — разности входных проводимостей обоих RC -трехполюсников.

Представим параметры каждого RC -трехполюсника в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\begin{aligned} y_{22}^a &= \frac{m_{22}^a(s)}{n^a(s)}; & y_{11}^b &= \frac{m_{11}^b(s)}{n^b(s)}; \\ y_{21}^a &= \frac{m_{21}^a(s)}{n^a(s)}; & y_{21}^b &= \frac{m_{21}^b(s)}{n^b(s)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Нули полиномов $m_{ii}(s)$ и $n(s)$ простые, лежат на вещественной отрицательной оси и взаимно чередуются, причем ближайшей к началу координат точкой является нуль m_{ii} . Нули $m_{21}(s)$ могут быть комплексными.

Подставив (5.35) в (5.34), имеем

$$Y_{21}(s) = \frac{K m_{21}^a \cdot m_{21}^b}{m_{22}^a n^b - m_{11}^b n^a}.$$

Знаменатель функции передачи здесь представлен в виде разности двух полиномов с вещественными отрицательными нулями.

Для определения параметров обоих трехполюсников по заданной в виде отношения двух полиномов $M(s)/N(s)$ функции $Y_{21}(s)$ следует разделить ее числитель и знаменатель на вспомогательный полином, который должен составить произведение $n^a(s) n^b(s) = Q(s)$ знаменателей y_{22}^a и y_{11}^b . Получившиеся после указанного деления параметры должны, конечно, удовлетворять условиям физической реализуемости RC -трехполюсников.

В качестве $Q(s)$ выбирается полином с простыми вещественными отрицательными нулями, степень которого равна или превышает на единицу наибольшую из степеней $N(s)$ или $M(s)$. Рассматриваемый полином может быть выбран из условия минимизации чувствительности, когда (см. § 5.3):

$$Q(s) = a(s) \cdot b(s).$$

В результате деления числителя и знаменателя функции передачи на вспомогательный полином получим

$$Y_{21}(s) = \frac{M(s)/Q(s)}{N(s)/Q(s)} = \frac{M(s)/Q_a \cdot Q_b}{(N_a/Q_a) - N_b/Q_b} = \frac{Ky_{21}^a y_{21}^b}{y_{22}^a - y_{11}^b},$$

где $Q = Q_a \cdot Q_b$.

Разбиение дроби в знаменателе на разность получается разложением $s(N/sQ)$ на простые дроби и группировкой дробей с положительными и отрицательными знаками. Знаки дробей определяются знаками вычетов — положительные вычеты имеют полюса, определяемые корнями Q_a , а отрицательные — полюса, определяемые корнями Q_b .

Для искоемых пар параметров обоих RC -трехполюсников имеем:

$$\begin{aligned} y_{22}^a &= N_a/Q_a; & y_{11}^b &= N_b/Q_b; \\ y_{21}^a &= M_a/K_a Q_a; & y_{21}^b &= M_b/K_b Q_b. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Здесь $M_a M_b / K_a K_b = KM(s)$.

Параметры y_{22}^a и y_{11}^b , как суммы положительных простых дробей с полюсами на отрицательной вещественной полуоси и нулями при $s=0$, являются входными проводимостями RC -цепей.

Если произведено оптимальное по чувствительности разложение знаменателя согласно (5.18), то функция передачи представляется как

$$Y_{21}(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{a^2(s) - sb^2(s)} = \frac{M(s)/a(s) b(s)}{\frac{a(s)}{b(s)} - \frac{sb(s)}{a(s)}} = \frac{Ky_{21}^a y_{21}^b}{y_{22}^a - y_{11}^b}.$$

Здесь разбиение на разность получается в процессе оптимального разложения полинома. Искомые параметры обоих RC -трехполюсников, также удовлетворяющие условиям физической реализуемости:

$$\begin{aligned} y_{22}^a &= a(s)/sb(s); & y_{11}^b &= sb(s)/a(s); \\ y_{21}^a &= M_a/K_a b(s); & y_{21}^b &= M_b/K_b a(s). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Как видно из (5.36) и (5.37), нули $M(s)$ могут быть распределены между нулями передач цепей a и b произвольным образом.

По каждой из пар полученных параметров можно построить трехполюсник.

В качестве примера реализуем проводимость передачи второго порядка:

$$Y_{21}(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}.$$

Примем оптимальное по чувствительности разложение знаменателя, которое имеет вид (пример § 5.3)

$$s^2 + s + 1 = (s + 1)^2 - Ks.$$

Приняв $Q(s) = s + 1$, представляем функцию передачи ($K = 1$)

$$Y_{21} = \frac{s}{(s+1)^2 - s} = \frac{s/s+1}{s+1-s/s+1}.$$

Параметры цепей согласно (5.34):

$$y_{22}^a = s + 1; \quad y_{11}^b = \frac{s}{s+1};$$

$$y_{21}^a = 1; \quad y_{21}^b = \frac{s}{s+1}.$$

Параметры цепи b реализуем слева направо, а параметры цепи a — справа налево. На рис. 5.6, б приведена полученная цепь.

Параллельная структура

Из ряда параллельных структур, реализующих заданную функцию передачи, рассмотрим схему, представленную на рис. 5.7. Схема состоит из параллельно соединенных двух цепей: каскадно включенного с конвертором отрицательного сопротивления пассивного RC -трехполюсника a и пассивного RC -трехполюсника b .

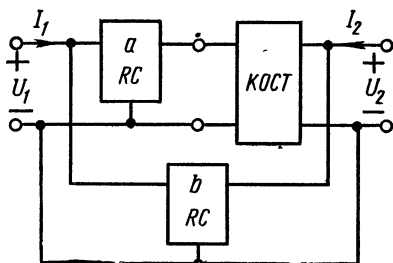


Рис. 5.7

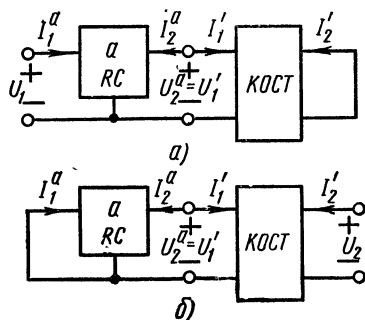


Рис. 5.8

ника b . Поскольку рассматривается параллельное соединение, то пассивные RC -трехполюсники будем характеризовать проводимостями короткого замыкания y_{ik}^a и y_{ik}^b .

Найдем параметры проводимости y_{ik} каскадной схемы из RC -трехполюсника a и конвертора токового типа с усилением K .

Будем рассматривать режимы короткого замыкания выводов выхода и входа цепи, изображенных на рис. 5.8 с указанием направлений токов и напряжений, которые связаны соотношениями:

$$I_1 = I_1^a; \quad I_2^a = -I_1'; \quad I_2 = I_2'; \quad U_2^a = U_1'.$$

Из схемы (рис. 5.8, а) режима короткого замыкания выводов выхода сразу получаем входную проводимость цепи слева $y_{11}' = y_{11}^a$, так как входное сопротивление КОСТ с короткозамкнутым выходом равно нулю. Передаточную проводимость цепи слева

направо можем записать с учетом нулевого сопротивления нагрузки цепи b :

$$y'_{21} = \frac{I'_2}{U_1} = \frac{I'_2}{I'_3} \cdot \frac{I'_3}{U_1} = -Ky'_{21}.$$

Из схемы (рис. 5.8, б) режима короткого замыкания выводов входа для выходной проводимости каскадной цепи имеем: $y'_{22} = -Ky'_{22}$, так как КОСТ изменяет знак проводимости на обратный.

Передаточную же проводимость справа налево можем записать как

$$y'_{12} = \frac{I_1^a}{U_2} = \frac{I_1^a}{U_1^a} \cdot \frac{U_1^a}{U_2} = y'_{12}^a.$$

Следовательно, матрица y -параметров каскадной схемы

$$y' = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ -Ky'_{21} & -Ky'_{22} \end{vmatrix}. \quad (5.38)$$

Наличие каскадно включенного КОСТ приводит, как видим, к изменению знака двух параметров.

Матрицу y -параметров рассматриваемой параллельной структуры получим, добавив к элементам (5.38) параметры y_{ik}^b пассивного трехполюсника b :

$$y = y' + y^b = \begin{vmatrix} y'_{11} + y_{11}^b & y'_{12} + y_{12}^b \\ -Ky'_{21} + y_{21}^b & -Ky'_{22} + y_{22}^b \end{vmatrix}. \quad (5.39)$$

Интересующая нас функция передачи напряжений параллельной цепи с КОСТ при учете полученных значений y -параметров выразится как

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-y_{21}}{y_{22}} = \frac{-y_{21}^b + Ky'_{21}}{y_{22}^b - Ky'_{22}}. \quad (5.40)$$

Здесь как числитель, так и знаменатель представлены в виде разностей передаточного и выходного y -параметров обоих пассивных трехполюсников.

Если знаменатели (полюса) параметров трехполюсников a и b выбрать одинаковыми, т. е. положить:

$$\begin{aligned} y_{22}^a &= m_{22}^a/n; & y_{22}^b &= m_{22}^b/n; \\ y_{21}^a &= m_{21}^a/n; & y_{21}^b &= m_{21}^b/n, \end{aligned}$$

то функция передачи

$$H_U(s) = \frac{-m_{21}^b(s) + Km_{21}^a(s)}{m_{22}^b(s) - Km_{22}^a(s)}.$$

Полиномы числителя и знаменателя представлены в виде разностных разложений.

Чтобы упростить процедуру определения по заданной рациональной дроби y -параметров, входящих в (5.40), задаются струк-

турами пассивных трехполюсников a и b . Если для обеих цепей принять простейшую Γ -образную структуру (рис. 5.9, a), параметры которой $y_{21} = -Y_1$ и $y_{22} = Y_1 + Y_2$, то функция передачи (5.40) представится как

$$H_U = \frac{Y_1^b - KY_1^a}{Y_1^b + Y_2^b - K(Y_1^a + Y_2^a)}. \quad (5.41)$$

Выбрав вспомогательный полином с нулями на вещественной отрицательной полуоси (за исключением начала), степень которой на единицу меньше наибольшей из степеней $M(s)$ или $N(s)$ делим на него числитель и знаменатель заданной функции передачи:

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)/Q(s)}{N(s)/Q(s)}. \quad (5.42)$$

Из сопоставления числителей (5.41) и (5.42) имеем

$$Y_1^b - KY_1^a = M(s)/Q(s). \quad (5.43)$$

Сопоставление знаменателей дает

$$Y_1^b + Y_2^b - K(Y_1^a + Y_2^a) = N(s)/Q(s).$$

Вычтя отсюда выражение (5.43), получим

$$Y_2^b - KY_2^a = \frac{N(s) - M(s)}{Q(s)}. \quad (5.44)$$

Для определения проводимостей порознь следует разложить правые части (5.43) и (5.44) на сумму простых дробей. Простые дроби с положительными вычетами образуют проводимости Y_1^a и Y_2^b ветвей цепи a и цепи b . Оставшиеся дроби с отрицательными вычетами дадут проводимости Y_1^b и Y_2^a ветвей цепи b и цепи a .

Реализация найденных проводимостей сводится к построению RC -двухполюсников, что является элементарной задачей. В этой простоте реализации пассивных подцепей состоит достоинство рассматриваемой структуры.

В качестве примера реализуем функцию передачи напряжений второго порядка с конечным нулем:

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{s+3}{s^2+s+1}.$$

Приняв $Q(s) = s+2$, разлагаем на простые дроби $s(M/sQ)$:

$$s \frac{s+3}{s(s+2)} = s \left(\frac{3/2}{s} - \frac{1/2}{s+2} \right) = 1,5 - \frac{0,5s}{s+2}.$$

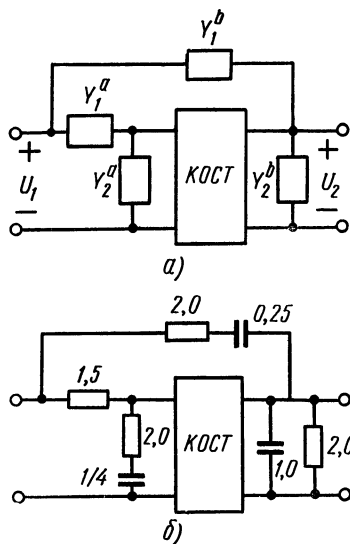


Рис. 5.9

Согласно (5.43) принимаем

$$Y_1^a = 1,5; KY_1^b = \frac{0,5s}{s+2}.$$

Разложение на простые дроби $s[(N-M)/sQ]$ дает

$$s \frac{s^2+s+1}{s(s+2)} = s \left[1 - \frac{0,5}{s} - \frac{0,5}{s+2} \right] = s - \left(0,5 + \frac{0,5s}{s+2} \right).$$

Согласно (5.44) остальные две проводимости

$$Y_2^b = s; KY_2^a = 0,5 + \frac{0,5s}{s+2}.$$

На рис. 5.9, б изображена реализующая цепь для $K=1$.

§ 5.7. Реализация функций передачи с помощью гираторов

Наибольшую известность получили два способа использования гираторов для реализации функций передачи RC -цепями:

1) замены индуктивностей в полученных методами синтеза пассивных RLC -цепях схемами из гиратора с включенной на выходе емкостью;

2) применения схем включения гиратора и двух пассивных RC -трехполюсников.

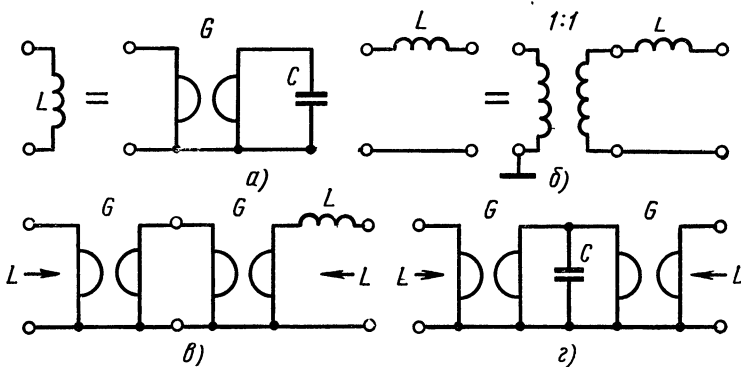


Рис. 5.10

Рассмотрим оба способа применения гираторов.

Реализация RC -цепями заменой индуктивностей гираторами с емкостями (имитацией индуктивностей)

Здесь используется непосредственно основное свойство инверсии сопротивлений гиратора — индуктивность L получается подключением к выходу гиратора с проводимостью гирации G емкости $C = LG^2$ (рис. 5.10, а).

В силу неидеальности реальной схемы гиратора добротность эквивалентной индуктивности оказывается меньше добротности присоединенного конденсатора.

Произведем оценку величины добротности, а также индуктивности, эквивалентной заданной емкости. Приняв паразитную входную проводимость неидеального гиратора $g_{22} = g_{11} = g \ll G$, запишем комплексную проводимость со стороны входа гиратора, если комплексная проводимость нагрузки $Y_n = g + j\omega C$:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{R + j\omega L} = g + \frac{G^2}{Y_n} = g + \frac{G^2}{g + j\omega C} \approx \frac{G^2 + j\omega Cg}{g + j\omega C}.$$

Отсюда

$$R + j\omega L \approx \frac{g(G^2 + \omega^2 C^2) + j\omega C G^2}{G^4 + \omega^2 C^2 g^2}.$$

Величина эквивалентной индуктивности

$$L = \frac{G^2 C}{G^4 + \omega^2 C^2 g^2}.$$

Добротность при заданных проводимости гирации и частоте конечна и определяется величиной паразитной проводимости:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{\omega C G^2}{g(G^2 + \omega^2 C^2)}. \quad (5.45)$$

Для получения высоких значений добротности необходимо уменьшать паразитные параметры гиратора.

Трудность, с которой приходится сталкиваться при замене индуктивностей, состоит в том, что практические схемы гираторов имеют один общий для входа и выхода вывод заземленным. Поэтому возможна замена гиратором с емкостью только индуктивности с заземленным одним выводом. Но в обычных RLC -цепях чаще встречаются индуктивности без заземления выводов.

Для преодоления указанной трудности предложена схема с двумя гираторами и емкостью, позволяющая заменить одну индуктивность с незаземленными выводами.

В схеме используется общий в теории цепей прием, дающий возможность заземлять цепи с элементами, выводы которых не соединены с землей, путем включения через идеальный трансформатор с изолированными обмотками (рис. 5.10, б).

Для идеального трансформатора с коэффициентом трансформации $n=1$, описываемого уравнениями: $U_1 = nU_2 = U_2$; $I_1 = -I_2 \cdot \frac{1}{n} = -I_2$, имеем матрицу параметров передачи

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Легко убедиться, что такую же матрицу параметров передачи имеет каскадное соединение двух идеальных гираторов. Действительно, соответствующее каскадному соединению произведение двух матриц параметров передачи идеального гиратора

$$a \cdot a = \begin{vmatrix} 0 & 1/G \\ G & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1/G \\ G & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, идеальный трансформатор и схема каскадного соединения двух гираторов эквивалентны.

Изображенная на рис. 5.10, *в* схема имеет равное индуктивное сопротивление как со стороны выхода, так и со стороны входа, так же как исходная незаземленная индуктивность. Указанный индуктивный эффект можно получить, если убрать индуктивность с выхода и включить емкость на выходе первого (или входе второго) гиратора, как показано на рис. 5.10, *г*. Это положение следует из основного свойства инверсии гиратора.

Описанная схема содержит два гиратора и соответственно большее число активных приборов; кроме того, схема требует весьма точной настройки. В этом состоит недостаток реализации *RC*-схемами заменой индуктивностей гираторами и емкостными элементами.

Большое достоинство метода замены индуктивностей состоит в том, что здесь в принципе сохраняется малая чувствительность исходной пассивной цепи, в отличие от других активных реализаций, в которых чувствительность пропорциональна величине добротности реализуемых полюсов и может быть недопустимо высокой при больших значениях *Q*. Поэтому метод представляет интерес для получения высокодобротных резонансных *RC*-контуров и фильтров.

Каскадная гираторная схема

На рис. 5.11, *а* представлена схема, реализующая заданную функцию передачи и состоящая из двух пассивных *RC*-трехполюсников на входе *a* и выходе *b* цепи и заземленного гиратора, включенного между пассивными цепями.

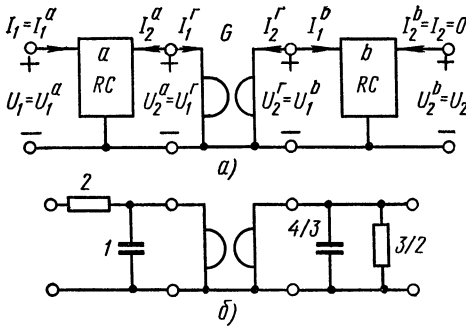


Рис. 5.11

Поскольку структура цепи принята, задача реализации сводится к определению параметров трехполюсников *a* и *b* и построению по ним *RC*-цепей.

Пусть требуется реализовать функцию передачи напряжения в режиме холостого хода, заданную в виде рациональной дроби с полюсами в правой полуплоскости.

Прежде всего необходимо выразить функцию передачи $H_U(s)$ через параметры обоих *RC*-трехполюсников. Так как на входе цепи действует источник напряжения, а выход цепи принят разомкнутым, то для цепи *b* удобно ввести *z*-параметры, а для цепи *a* — *y*-параметры.

На рис. 5.11, *a* указаны принятые направления токов и напряжений выводов элементов, которые связаны соотношениями:

$$I_1^b = -I_2^e; \quad I_1^e = -I_2^a; \quad U_1^b = U_2^e; \quad U_2^a = U_1^e.$$

Интересующая нас функция передачи может быть записана в виде

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{I_1^b} \cdot \frac{I_1^b}{U_1^e} \cdot \frac{U_1^e}{U_1^a} = \frac{U_2^b}{I_1^b} \cdot \frac{-I_2^e}{U_1^e} \cdot \frac{U_2^a}{U_1^a}. \quad (5.46)$$

Отношения величин являются передачами отдельных трехполюсников, определенными с учетом соответствующих нагрузок.

Первое отношение U_2^b/I_1^b при разомкнутом выходе цепи по смыслу представляет передаточное сопротивление z_{21}^b цепи *b* в режиме холостого хода. Входное сопротивление z_{11}^b этой цепи является нагрузкой гиратора. Входная проводимость гиратора, равная согласно свойству (4.32) $z_{11}^b G^2$, представляет нагрузку для цепи *a*.

Второе отношение — тока выхода к напряжению входа гиратора — равно проводимости гирации *G*.

Третье отношение — напряжений выхода и входа трехполюсника *a*, нагруженного проводимостью $Y_n = G^2 z_{11}^b$, в соответствии с (B.6) равно

$$\frac{U_2^a}{U_1^a} = \frac{-y_{31}^a}{y_{22}^a + G^2 z_{11}^b}.$$

Перемножив найденные передачи отдельных каскадов, получим искомую функцию передачи напряжений:

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-G y_{31}^a z_{21}^b}{y_{22}^a + G^2 z_{11}^b}. \quad (5.47)$$

Знаменатель выражения состоит из суммы входных параметров обоих трехполюсников, а числитель — из произведения передаточных параметров. Выражение (5.47) аналогично выражению (5.34) для каскадной схемы с КОС, только в знаменатель вместо разности входит сумма параметров. Соответственно здесь требуется разложение полинома знаменателя на сумму двух полиномов с вещественными отрицательными корнями. Параметр гиратора G^2 войдет в знаменатель линейным образом.

Для разложения заданного знаменателя $N(s)$ с комплексными полюсами на сумму указанных полиномов следует выбрать вспомогательный полином $Q(s)$ с вещественными отрицательными нулями, степень которого равна или меньше на единицу степени $N(s)$. Полином $Q(s)$ может быть выбран из условия оптимизации чувствительности, когда он согласно (5.23) имеет вид $Q(s) = a_1(s) b_1(s)$ и знаменатель

$$N(s) = a_1^2(s) + G^2 b_1^2(s).$$

Определение параметров подцепей производится разложением выражения $N(s)/Q(s)$ на простые дроби.

Рассмотрим в качестве примера гираторную RC реализацию функции передачи фильтра нижних частот

$$H(s) = \frac{-K}{s^2 + s + 1}.$$

Разложение знаменателя на сумму полиномов получено в примере § 5.3. Поэтому функцию передачи можем записать как

$$H(s) = \frac{-K}{(s+0,5)^2 + G^2 \cdot 3/4}.$$

Для получения дробно-рациональных параметров делим числитель и знаменатель на $s+0,5$ и согласно (5.47) при $G^2=1$ получим

$$H(s) = \frac{-K/(s+0,5)}{s+0,5+0,75/(s+0,5)} = \frac{-y_{21}^a \cdot z_{21}^b}{y_{22}^a + z_{11}^b}.$$

Тождественное приравнивание дает:

$$y_{22}^a = s + 0,5; \quad z_{11}^b = \frac{0,75}{s + 0,5}.$$

$$y_{21}^a = K_a; \quad z_{21}^b = \frac{K_b}{s + 0,5}.$$

Цепь b реализуем по параметрам $z_{11}^b = z_{21}^b$ слева направо, а цепь a — по параметрам y_{22}^a и y_{21}^a справа налево. Реализующая цепь изображена на рис. 5.11, б, где: $K_a = 0,5$; $K_b = 0,75$ и $K = K_a \cdot K_b = 0,375$.

Параллельная гираторная схема

Параллельная гираторная схема (рис. 5.12) состоит из двух параллельно соединенных трехполюсных цепей: каскадно-соединенного с гиратором пассивного RC -трехполюсника a и пассивного трехполюсника b . В данном случае параллельно соединенных структур удобно задавать пассивные трехполюсники параметрами проводимостей короткого замыкания.

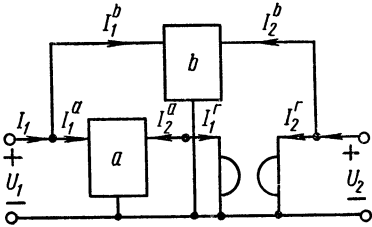


Рис. 5.12

Функция передачи результирующей трехполюсной цепи с разомкнутым выходом, когда $I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 = 0$, определяется отношением двух параметров:

$$U_2/U_1 = -y_{21}/y_{22}. \quad (5.48)$$

Как видим, достаточно найти выражения двух параметров. Найдем сначала обе проводимости короткого замыкания для нижней цепи из каскадного соединения трехполюсника a и гиратора с проводимостью G .

При короткозамкнутом входе трехполюсника a его выходная проводимость справа равна y_{22}^a . Выходная проводимость цепи со

стороны правых выводов гиратора, представляющая одну из иско-
мых проводимостей, согласно (4.35)

$$y'_{22} = G^2/y_{22}^a. \quad (5.49)$$

При короткозамкнутых выводах выхода гиратора согласно (4.34) ток и напряжение на выходе гиратора или выходе трех-
полюсника a равны соответственно:

$$U_2^a = U_1^2 = -I_2/G; \quad I_3^a = -I_1^2 = 0.$$

Из уравнения трехполюсника a при учете записанных значений
выходных величин

$$I_3^a = 0 = y_{21}^a U_1^a + y_{22}^a U_2^a; \quad y_{21}^a U_1^a = y_{22}^a I_2/G$$

получаем

$$y'_{21} = G y_{21}^a / y_{22}^a. \quad (5.50)$$

Интересующие нас два параметра всей цепи получатся, если
к найденным проводимостям (5.49) и (5.50) каскадной подцепи
добавить соответствующие проводимости параллельно присоеди-
ненного трехполюсника b :

$$y_{22} = y'_{22} + y_{22}^b = \frac{G^2}{y_{22}^a} + y_{22}^b; \quad (5.51)$$

$$y_{21} = y'_{21} + y_{21}^b = G \frac{y_{21}^a}{y_{22}^a} + y_{21}^b.$$

Отношение найденных параметров дает искомую функцию
передачи напряжений цепи в режиме разомкнутого выхода:

$$H_U = - \frac{G y_{21}^a + y_{22}^b y_{21}^b}{G^2 + y_{22}^a \cdot y_{22}^b} = - \frac{y_{21}^b + G y_{21}^a / y_{22}^a}{y_{22}^b + G^2 / y_{22}^a}. \quad (5.52)$$

Знаменатель и числитель функций передачи представлены
в виде сумм; параметр — проводимость гиратора G входит в обе
суммы различным образом — в первой и второй степенях, т. е.
не билинейно. Для определения проводимостей пассивных подце-
пей по заданной в виде рациональной дроби функции передач
напряжений необходимо знаменатель разбить на сумму полиномов.
В частности, при оптимальном по чувствительности разложении
согласно § 5.3 знаменатель представится как

$$N(s) = a^2(s) + K b^2(s).$$

Для нахождения параметров, входящих в (5.52), следует раз-
делить числитель и знаменатель заданной функции передачи на
 $a(s) b(s)$:

$$H_U(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{a^2(s) + K b^2(s)} = \frac{M(s)/a(s) b(s)}{\frac{a(s)}{b(s)} + K \frac{b(s)}{a(s)}}. \quad (5.53)$$

Из приравнивания знаменателей (5.52) и (5.53) сразу получим

$$\begin{aligned} y_{22}^a &= G^2 b(s)/a(s); \\ y_{22}^b &= K b(s)/a(s). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Для определения передаточных параметров обоих трехполосников следует числитель (5.53) разложить на сумму простых дробей и приравнять полученное выражение числителю (5.52).

Рассмотрим в качестве примера реализацию функции передачи цепи в режиме разомкнутого выхода

$$H_U(s) = M(s)/N(s) = K_1(s+1)/(s^2+s+1).$$

Оптимальное разложение полинома знаменателя рассматривалось в § 5.3 и имеет вид

$$N(s) = s^2 + s + 1 = (s + 0,5)^2 + 3/4.$$

Деление числителя и знаменателя на $s + 0,5$ дает

$$\frac{K_1(s+1,5)/(s+0,5)}{(s+0,5) + 3/4(s+0,5)}.$$

Разложение выражения в числителе дает

$$\frac{K_1(s+1,5)}{s+0,5} = K_1 \left(1 + \frac{1}{s+0,5} \right).$$

В результате приравнивания получаем следующие значения параметров:

$$y_{22}^a = G^2 \frac{1}{s+0,5}; \quad y_{22}^b = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+0,5};$$

$$y_{21}^a = y_{22}^a \cdot \frac{K_1}{G}; \quad y_{21}^b = \frac{K_1}{s+0,5}.$$

Задачи

1. Вычислить классическую чувствительность к изменению параметра x с единичным номинальным значением следующих функций передачи:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3 + 2xs}{s^2 + x(2s + 3)};$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 4xs + 1}{s^3 + 4x(s^2 + 1) + 4s}.$$

Для первой функции построить график чувствительности модуля.

2. Вычислить корневую чувствительность для полиномов:

$$N(s, x) = s^2 + 4xs + 1;$$

$$N(s, x) = s^2 + xs + 4.$$

3. Найти оптимальное по чувствительности разложение на разность следующего полинома:

$$N(s) = s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 8s + 9.$$

4. Реализовать с помощью RC -схемы (рис. 5.3) с управляемыми источниками функцию передачи

$$H_U(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+4}.$$

5. Реализовать с помощью RC -схемы (рис. 5.4) с управляемыми источниками функцию передачи

$$H_U(s) = \frac{s^2+1}{s^2+2s+4}.$$

6. Реализовать с помощью параллельной схемы на конверторе отрицательного сопротивления (рис. 5.7) функцию передачи

$$H_U(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5}.$$

7. С помощью каскадной схемы, использующей КОС, реализовать функцию передачи

$$H_U(s) = \frac{K}{s^2+3s+8}.$$

8. Реализовать с помощью гираторной схемы функцию передачи предыдущего примера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзинов М. М. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. «Энергия», 1968.
2. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергониздат, 1961.
3. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. «Связь», 1967.
4. Гиллемин Э. А. Синтез пассивных цепей. «Связь», 1970.
5. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. ГИТТЛ, 1954.
6. Знаменский А. Е., Теплюк И. Н. Активные RC -фильтры. «Связь», 1970.
7. Ионкин П. А., Боголюбов В. Е. и др. Основы инженерной электрофизики, ч. II. «Высшая школа», 1972.
8. Калахан Д. А. Методы машинного расчета электронных схем. «Мир», 1970.
9. Кочанов Н. С. Основы синтеза линейных электрических цепей во временной области. «Связь», 1967.
10. Ланнэ А. А. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. «Связь», 1969.
11. Матханов П. Н. Синтез реактивных четырехполюсников по временным функциям. «Энергия», 1970.
12. Мишина А. П. и Проскуряков И. В. Высшая алгебра. «Наука», 1965.
13. Тафт В. А. Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным частотным характеристикам. Изд-во АН СССР, 1954.
14. Хьюлсман Л. П. Теория и расчет активных RC -цепей. «Связь», 1973.
15. Mitra S. K. Analysis and Synthesis of Linear Active Networks. Wiley, 1969.
16. Kuh E. S., Rohrer R. A. Theory of Linear Active Networks. Holden-Day, 1967.

О Г Л А В Л Е Н И Е

| | Стр. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Предисловие | 3 |
| Введение | 5 |
| § В.1. Задача синтеза электрических цепей | 5 |
| § В.2. Пассивные и активные линейные цепи | 7 |
| § В.3. Параметры и функции двухполусных и четырехполусных цепей | 10 |
| § В.4. Частотные характеристики. Определение выражения функции цепи | 13 |
| § В.5. Параметры рассеяния | 17 |
| | |
| Глава I. Свойства входных функций пассивных двухполусных цепей и их реализация | 25 |
| § 1.1. Энергетические функции цепи | 25 |
| § 1.2. Положительные вещественные функции и их свойства | 30 |
| § 1.3. Свойства и реализация входных функций реактивных двухполусников | 37 |
| § 1.4. Свойства и реализация входных функций RC -цепей | 45 |
| § 1.5. Свойства и реализация входных функций RL -двухполусников | 52 |
| § 1.6. О реализации входных функций RLC -двухполусников | 55 |
| | |
| Глава II. Свойства параметров и реализация функций передачи пассивных четырехполусников | 59 |
| § 2.1. Общие замечания | 59 |
| § 2.2. Свойства параметров пассивных четырехполусников | 61 |
| § 2.3. Реализация функций передачи реактивного четырехполусника лестничной структуры | 66 |
| § 2.4. Реализация функций передачи RC -четыреполусников | 73 |
| § 2.5. Реализация функций передачи мостовыми (скрещенными) четырехполусниками | 82 |
| § 2.6. Реализация по методу Дарлингтона | 87 |
| § 2.7. О реализации функции передачи реактивным четырехполусником с двусторонней нагрузкой | 93 |
| | |
| Глава III. Аппроксимация и синтез пассивных цепей по частотным и временным характеристикам | 99 |
| § 3.1. Общие сведения | 99 |
| § 3.2. Об аппроксимации частотных и временных характеристик | 103 |
| § 3.3. Методы аппроксимации временных характеристик | 105 |
| § 3.4. Синтез полиномиальных частотных фильтров | 112 |
| § 3.5. Синтез цепи задержки | 118 |
| § 3.6. Синтез реактивной цепи, формирующей импульс прямоугольной формы | 122 |
| | 207 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 3.7. О синтезе широкополосных согласующих цепей | 125 |
| § 3.8. Понятие о задаче оптимизации цепей с помощью цифровых вычислительных машин | 135 |
| Глава IV. Идеальные элементы активных цепей | 143 |
| § 4.1. Общие замечания | 143 |
| § 4.2. Нулаторы и нораторы | 146 |
| § 4.3. Управляемые источники | 151 |
| § 4.4. Операционный усилитель | 155 |
| § 4.5. Конвертор отрицательного сопротивления | 158 |
| § 4.6. Гиратор | 164 |
| Глава V. Реализация функций передачи активными четырехполюсниками | 168 |
| § 5.1. Общие замечания | 168 |
| § 5.2. Понятие о чувствительности цепей | 171 |
| § 5.3. Разложение полиномов | 178 |
| § 5.4. Реализация функций передачи активными RC -цепями с управляемыми источниками | 183 |
| § 5.5. Реализация функций передачи активными RC -цепями с операционными усилителями | 189 |
| § 5.6. Реализация функций передачи с помощью RC -цепей и конверторов отрицательного сопротивления | 191 |
| § 5.7. Реализация функций передачи с помощью гираторов | 198 |
| Литература | 206 |

ПЛАТОН НИКОЛАЕВИЧ МАТХАНОВ

**ОСНОВЫ СИНТЕЗА
ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Редактор Г. А. Сорокина. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Переплет художника Ю. Д. Федичкина. Технический редактор Н. В. Яшукова. Корректор В. В. Кожуткина

Т-16978. Сдано в набор 16/VI-75 г. Подп. к печати 24/X-75 г. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 3. Объем 13 печ. л. Усл. п. л. 13. Уч.-изд. л. 12,10. Изд. № ЭР—182. Тираж 20 000 экз. Зак. № 38. Цена 42 коп.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1976 г. Позиция № 124.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.
Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

42 коп.



19 76

«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

МОСКВА